CZU: 517.968

ALGEBRE ECHIVALENTE DE OPERATORI INTEGRALI SINGULARI. CRITERII NOETHERIENE

Diana BÂCLEA, Vasile NEAGU*

Universitatea de Stat din Cahul
**Universitatea de Stat din Moldova*

În prezenta lucrare sunt stabilite condiții necesare și suficiente în care operatorii integrali singulari cu translații de tip Carleman sunt noetherieni, se determină simbolul și se calculează indicele acestor operatori. Aceste rezultate sunt obținute datorită studiului algebrei generate de acești operatori în spațiul L_p cu o anumită pondere, aleasă astfel încât să asigure continuitatea operatorilor. În studiul algebrei respective un rol important are noțiunea de echivalență a algebrelor Banach, introdusă de către matematicienii I.Gohberg și N.Krupnik.

Cuvunte-cheie: *operator integral singular, operator noetherian, simbol.*

EQUIVALENT ALGEBRAS OF SINGULAR INTEGRAL OPERATORS. NOETHERIAN CRITERIONS

In the present work there are established necessary and sufficient conditions **under** which sungular integral operators with shift of Carleman tipe are Notherian, the symbol of these operators is determined and index of these operators is calculated. These results are obtained due to the study of the algebra, generated by these operators in the space $\mathrm{L_p}$ with a certain weight, chosen in such a way, that continuity of operators is ensured. In the study of this algebra an important role has the notion of equivalence of Banach algebras, introduced by mathematicians I. Gohberg and N.Krupnik.

Keywords: *singular integral operator, noetherian operator, symbol.*

Ecuațiile integrale singulare cu translație $\alpha(t)$, în condiţiile în care derivata $\alpha'(t)$ este o funcţie hölderiană, au fost studiate în lucrările multor autori. Facem trimitere la lucrarea [1] care conține și o analiză bibliografică. Cazul în care funcția $\alpha'(t)$ este hölderiană pe porțiuni a fost studiat în mai multe lucrări, inclusiv în [2,3]. În mod evident aceste condiții asupra funcției $\alpha(t)$ presupun că conturul Γ este mărginit. În cazul conturului nemărginit, funcția $\alpha(t)$ este și ea nemărginită. În consecință [4], operatorul de translație $(V\varphi)(t)=\varphi(\alpha(t))$ este, în general, nemărginit în spațiile funcțiilor în care operatorul cu nucleu Cauchy este mărginit. De exemplu, dacă $\Gamma=\mathrm{R}(=(-\infty,\infty))$ și $\alpha(t)=\frac{1}{t}:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, atunci operatorul $(V\varphi)(t)=\varphi(\frac{1}{t})$ nu este mărginit în niciun spațiu $L_p(\mathrm{R},\rho)$, unde

$$\rho(t)=|t|^{\beta},\ -1<\beta<p-1. \tag{1}$$

Într-adevăr,

$$\|(V\varphi)(t)\|^p=\int_{-\infty}^{+\infty}|(V\varphi)(t)|^p|t|^{\beta}\,|dt|=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(\frac{1}{t})\right|^p|t|^{\beta}\,|dt|=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^p|x|^{-\beta}\frac{1}{|x^2|}\,|dx|=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|^p|x|^{-2-\beta}\,|dx|.$$

Din această egalitate rezultă: dacă presupunem că operatorul V este mărginit în $L_p(\mathrm{R},\rho)$, atunci în mod necesar trebuie să avem $-2-\beta=\beta,\ \beta=-1$, ceea ce este în contradicție cu condițiile (1). Menționăm că condițiile (1) asupra ponderei $\rho(t)$ sunt impuse de necesitatea ca operatorul integral singular să fie mărginit în spațiul $L_p(\mathrm{R},\rho)$.

Aceste circumstanțe sugerează ideea de a considera spații cu ponderi speciale, de a defini în mod „*rezonabil*" operatorul de translație V, astfel încât operatorul integral singular cu translația $\alpha(t)$ să devină mărginit.

Pe conturul nemărginit Γ considerăm ecuația integrală

$$(A\varphi)(t) \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + c(t)\varphi(\alpha(t)) + d(t)\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - \alpha(t)} = f(t), \qquad (2)$$

unde $\alpha(t)$ este o translație a conturului Γ pe el însuși (cu păstrarea sau schimbarea orientării pe Γ) care îndeplinește condițiile lui Carleman: $\alpha(\alpha(t)) \equiv t \quad (\alpha(t) \not\equiv t)$.

În această lucrare sunt stabilite condițiile necesare și suficiente în care operatorul A este noetherian, este determinat simbolul și sunt calculate indicele acestui operator. Aceste rezultate sunt obținute datorită studiului algebrei, generate de acești operatori în spațiul L_p cu o anumită pondere, aleasă astfel încât să asigure continuitatea operatorului A. În studiul algebrei respective un rol important are noțiunea de echivalență a algebrelor Banach. Pentru a defini această noțiune vom introduce următoarea notație. Fie B un spațiu Banach, prin $L(\mathsf{B})$ notăm algebra Banach formată din toți operatorii liniari și mărginiți care acționează din spațiul B în el însuși.

Definiție. *Două algebre (subalgebre) Banach* $\mathsf{A}_1 (\subset L(\mathsf{B}_1))$ *și* $\mathsf{A}_2 (\subset L(\mathsf{B}_2))$ *le vom numi echivalente, dacă există un operator inversabil* $\mathsf{M} \in L(\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2)$, *astfel încât mulțimea operatorilor de forma* $MAM^{-1} (A \in \mathsf{A}_1)$ *coincide cu algebra* A_2.

Astfel, având o algebră A_1 echivalentă cu o algebră A_2, unele proprietăți cunoscute pentru operatorii din algebra A_2 se extind și asupra operatorilor din algebra A_1. De exemplu, dacă se cunosc condițiile de inversabilitate (la stânga sau la dreapta) sau de rezolvabilitate normală a operatorilor din algebra A_2, atunci facem concluziile respective de inversabilitate sau de rezolvabilitate normală pentru operatorii din algebra A_1.

În lucrare, în calitate de algebră A_2 se consideră algebra generată de operatorii integrali singulari cu coeficienți continui pe porțiuni, în care criteriile noetheriene și indicele acestor operatori se exprimă prin simbolul lor, definit în cunoscutele lucrări ale lui I.Gohberg și N.Krupnik (a se vedea [6], precum și bibliografia din această lucrare). Cu ajutorul echivalenței algebrelor se demonstrează că studiul ecuațiilor integrale singulare cu translații pe un contur nemărginit (de exemplu, pe axa reală) în spații cu ponderi, alese în mod „*corect*", poate fi redus la cazuri cunoscute și studiate în [6-8] și în alte lucrări. De fiecare dată, condițiile noetheriene și mărimea indicelui operatorilor din algebrele abordate în prezenta lucrare se exprimă prin determinantul unei matrice de funcții, care depinde de coeficienții operatorilor, de funcția de translație și de spațiu. Această matrice se numește *simbolul* operatorului respectiv.

I. Criterii noetheriene pentru ecuații integrale singulare cu translații omografice (*translații directe*)

Ne propunem să examinăm cazul particular, însă foarte important în aplicații, în care $\Gamma = \mathbb{R}$, iar $\alpha(x)$ este o translație omografică.

Notăm prin L_p^γ mulțimea funcțiilor φ complexe de variabilă reală, care verifică condiția

$$L_p^\gamma = \left\{ \varphi : \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p |x - \delta|^\gamma dx < \infty \right\} \quad (-1 < \gamma < p-1,\ \delta \in \mathbb{R}).$$

În spațiul L_p^γ norma se definește în felul următor:

$$\|\varphi\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p |x - \delta|^\gamma dx\right)^{1/p}.$$

Se poate arăta cu ușurință că L_p^γ este un spațiu Banach. În acest spațiu considerăm ecuațiile integrale

$$(A\varphi)(x) \equiv a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y - x}dy + c(x)\varphi(\alpha(x)) + \frac{d(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y - \alpha(x)}dy = f(x), \qquad (1.1)$$

$$(B\varphi)(x) \equiv a(x)\varphi(x) + \frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y - x}dy + c(x)\varphi(\alpha(x)) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(y)\varphi(\alpha(y))}{y - x}dy = f(x), \qquad (1.2)$$

unde $\alpha(x)=\dfrac{\delta x+\beta}{x-\delta}$, $\beta,\delta\in\mathsf{R}$. Observăm că aplicația $\alpha(x)$ transformă punctul $x=\delta$ în ∞, ∞ în punctul $x=\delta$ și îndeplinește condiția lui Carleman $\alpha(\alpha(x))\equiv x$.

În acest paragraf (în anumite condiții impuse funcței $\alpha(x)$) se studiază detaliat operatorii A și B, definiți de părțile stângi ale egalităților (1.1) și, respectiv, (1.2). Metoda de cercetare, aplicată în această lucrare, folosește rezultatele din teoria lui Noether pentru operatorii integrali singulari (fără translație) cu coeficienți continui pe porțiuni, elaborată în [5,7] și în alte lucrări.

De obicei (a se vedea [1]), în teoria operatorilor cu translație de tip Carleman sunt evidențiate două cazuri: α păstrează orientarea (translație directă), sau α schimbă orientarea (translație inversă). După cum vom vedea, aceste condiții sunt esențiale, abordarea și rezultatele finale fiind diferite. În acest paragraf vom studia cazul în care funcția $\alpha:\mathsf{R}\to\mathsf{R}$ păstrează orientarea pe R, deci este îndeplinită condiția $D=\delta^2+\beta<0$. Pentru a cerceta operatorii (1.1) și (1.2), vom apela la schema abstractă din [6,9,10]. Pentru comoditate, o prezentăm succinct aici.

Fie A_1, A_2 și V operatori liniari și mărginiți într-un spațiu Banach B și $V^2=I\ (V\neq\pm I)$. Considerăm operatorul A de forma

$$A=A_1+VA_2 \tag{1.3}$$

Fie îndeplinite următoarele axiome:

1) În B există un operator noetherian U, astfel încât $UV=-VU+T$, unde $T\in\mathsf{T}(\mathsf{B})$.

2) Operatorii A_1 și A_2 cvasicomută cu U,

$$A_jU=UA_j+T_j\ \ (j=1,2).$$

Atunci are loc următoarea teoremă.

Teorema 1.1. *Pentru ca operatorul A, definit prin egalitatea (1.3), să fie noetherian în spațiul B, este necesar și suficient ca în spațiul $\mathsf{B}^2=\mathsf{B}\times\mathsf{B}$ să fie noetherian operatorul*

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix} A_1 & VA_2V \\ A_2 & VA_1V \end{Vmatrix}.$$

Dacă $\tilde{A}$ este noetherian, atunci

$$\operatorname{Ind} A=\frac{1}{2}\operatorname{Ind}\tilde{A}.$$

Afirmațiile teoremei rezultă din următoarele trei constatări:

1. Are loc identitatea

$$\begin{Vmatrix} I & V \\ I & -V \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} A_1 & VA_2V \\ A_2 & VA_1V \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} I & I \\ V & -V \end{Vmatrix}=2\begin{Vmatrix} A_1+VA_2 & 0 \\ 0 & A_1-VA_2 \end{Vmatrix};$$

2. Operatorii

$$\begin{Vmatrix} I & V \\ I & -V \end{Vmatrix},\ \begin{Vmatrix} I & I \\ V & -V \end{Vmatrix}$$

sunt inversabili;

3. Din axiomele 1) și 2) rezuliă că există un operator noetherian U, încât

$$(A_1+VA_2)U=U(A_1-VA_2)+T,$$

unde T este un operator compact.

Observația 1.1. *În condițiile teoremei 1.1, ambii operatori A_1+VA_2 și A_1-VA_2 sunt sau nu sunt noetherieni. În plus, în cazul în care sunt noetherieni, are loc egalitatea*

$$\operatorname{Ind}(A_1+VA_2)=\operatorname{Ind}(A_1-VA_2).$$

Definim următorul operator

$$(V\varphi)(x)=\frac{\omega}{(x-\delta)^{\lambda}}\varphi(\alpha(x)), \tag{1.4}$$

unde $\omega = |D|^{\lambda/2} e^{\pi i\lambda/2}$ și $(x-\delta)^{\lambda} = |x-\delta|^{\lambda} e^{\frac{\pi i\lambda}{2}[1-\operatorname{sgn}(x-\delta)]}$.

Se arată ușor că operatorul V este involutiv, $V^2 = I$.

Vom determina $\lambda \in \mathbb{R}$ din condiția ca operatorul V să fie mărginit în spațiul L_p^{γ}. Avem:

$$\|V\varphi\|_{L_p^{\gamma}}^p = |D|^{\lambda p/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\alpha(x))|^p |x-\delta|^{\gamma-\lambda p} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p |x-\delta|^{\lambda p-2-\gamma} dx.$$

Așadar, dacă $\lambda = \dfrac{2(\gamma+1)}{p}$, atunci $\|V\varphi\|_{L_p^{\gamma}} = \|\varphi\|_{L_p^{\gamma}}$. Să observăm că în acest caz

$$-1<\gamma<p-1 \Leftrightarrow 0<\lambda<2.$$

Fie $f \in C(\overline{\mathbb{R}})$. Convenim să notăm prin $\tilde{f}$ funcția $\tilde{f}(x) = f(\alpha(x))$. Astfel, $\tilde{\tilde{f}} \equiv f$. Atunci operatorul A, definit prin egalitatea (1.1), poate fi scris sub forma

$$A = A_1 + VA_2,$$

unde V este operatorul (1.4), $A_1 = aI + bS$, $A_2 = c_0 I + d_0 S$,

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad c_0(x) = \frac{\omega}{(x-\delta)^{\lambda}}\tilde{c}(x), \qquad d_0(x) = \frac{\omega}{(x-\delta)^{\lambda}}\tilde{d}(x).$$

Teorema 1.2. *Fie $a,b,c_0,d_0 \in C(\overline{\mathbb{R}})$. Operatorul*

$$A = A_1 + VA_2$$

este noetherian în L_p^{γ}, dacă și numai dacă

$$\Delta_{\pm}(x) = [a(x) \pm b(x)]\,[\tilde{a}(x) \pm \tilde{b}(x)] - [c(x) \pm d(x)]\,[\tilde{c}(x) \pm \tilde{d}(x)] \neq 0. \tag{1.5}$$

Dacă condițiile (1.5) sunt îndeplinite, atunci

$$\operatorname{Ind} A = -\frac{1}{2}\operatorname{ind}\frac{\Delta_+(x)}{\Delta_-(x)}. \tag{1.6}$$

Pentru a ușura demonstrația acestei teoreme, vom enunța mai întâi următoarea lemă.

Lema 1.1. *Fie $a,b,c \in C(\overline{\mathbb{R}})$ și*

$$H = (x-\delta)^{\lambda_1} S (x-\delta)^{-\lambda_1} - S, \qquad -\frac{1+\gamma}{p} < \lambda_1 < 1 - \frac{1+\gamma}{p}.$$

Operatorul $M = aI + bS + cH$ este noetherian în spațiul L_p^{γ}, dacă și numai dacă noetherian este operatorul $M_0 = aI + bS$. În plus, $\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} M_0$.

Demonstrație. Notăm cu $M(x,\mu)$ și $M_0(x,\mu)$ simbolurile operatorilor M și, respectiv, M_0. Simbolul operatorului $M_0 = aI + bS$ are forma

$$M_0(x,\mu) = \left\| \begin{matrix} a(x)+b(x) & 0 \\ 0 & a(x)-b(x) \end{matrix} \right\|. \tag{1.7}$$

Pentru determinarea simbolului lui $M = aI + bS + cH$ apelăm la lucrarea [6], din care deducem că simbolul operatorului H în punctul $x = \delta$ are forma

$$H(\delta,\mu) = \left\| \begin{matrix} 0 & u(\mu) \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{1.8}$$

unde

$$u(\mu) = \left\{ \frac{4\nu(\mu)\cos(\pi\lambda_1)\exp(\pi i\lambda_1)}{2l(\mu)\cos(\pi\lambda_1)\exp(\pi i\lambda_1)+1} \right., \qquad l(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta\mu \cdot \exp(i\theta\mu)}{\sin\theta \cdot \exp(i\theta)}, & \text{dacă} \quad \theta \neq 0, \\ \mu, & \text{dacă} \quad \theta = 0 \end{cases}, \; \theta = \pi - \frac{2\pi(1+\gamma)}{p} \text{ și}$$

$$\nu(\mu) = \sqrt{l(\mu)(1-l(\mu))} \quad (0 \le \mu \le 1).$$

Evident, operatorul H are singularitate numai în punctele $x=\delta$ şi $x=\infty$, de aceea în punctele $x \in \mathbb{R} \setminus \{\delta, \infty\}$ el este echivalent cu operatorul nul. Prin urmare,

$$H(x,\mu)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad x \neq \delta,\ x \neq \infty.$$

Pentru a calcula simbolul lui H în punctul $x=\infty$, procedăm în felul următor. Considerăm operatorul liniar şi mărginit $R: L_p\left(\mathbb{R}, |x-\delta|^{\gamma}\right) \to L_p\left(\mathbb{R}, |t|^{p-2-\gamma}\right)$, definit prin relaţia

$$(R\varphi)(t)=\frac{1}{t}\varphi\left(\frac{\delta t-1}{t}\right) .$$

Operatorul R este inversabil,

$$(R^{-1}\psi)(x)=-\frac{1}{x-\delta}\psi\left(-\frac{1}{x-\delta}\right).$$

Este firesc ca simbolul operatorului H în punctul $x=\infty$ să-l definim prin simbolul operatorului RHR^{-1} în punctul $x=0$. Calculăm RHR^{-1}. Fie $f\ (x)=(x-\delta)^{\lambda_1}$, atunci

$$RfR^{-1}=\left(-\frac{1}{t}\right)^{\lambda_1} I = t^{-\lambda_1} e^{\pi i \lambda_1} I,$$

$$(RSR^{-1}\varphi)(t)=-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{x-\delta}\varphi\left(\frac{1}{x-\delta}\right)}{x-\frac{t\delta-1}{t}}dx=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau\varphi(\tau)}{\frac{\delta\tau-1}{\tau}-\frac{\delta t-1}{t}}\frac{d\tau}{\tau^2}=(S\varphi)(t).$$

Prin urmare, $RMR^{-1}=t^{-\lambda_1}St^{\lambda_1}I$ şi

$$\frac{1+p-\gamma-2}{p}<-\lambda_1<1-\frac{1+p-\gamma-2}{p}.$$

Aşadar, simbolul operatorului H în punctul $x=\infty$ are forma (1.8), în care λ_1 trebuie înlocuit cu $-\lambda_1$, iar θ cu $-\theta$, adică funcţia $u(\mu)$ trebuie înlocuită cu $\overline{u(\mu)}$. Astfel, simbolul operatorului M are forma

$$M(x,\mu)=\begin{Vmatrix} a(x)+b(x) & c(x)\,\omega(x,\mu) \\ 0 & a(x)-b(x) \end{Vmatrix}, \tag{1.9}$$

unde $\omega(x,\mu)=0$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{\delta,\infty\}$, $\omega(\delta,\mu)=u(\mu)$ şi $\omega(\infty,\mu)=\overline{u(\mu)}$. Deci, $\det M(x,\mu)=\det M_0(x,\mu)$. De aici rezultă că operatorii M şi M_0 sunt în acelaşi timp noetherieni şi $\operatorname{Ind} M=\operatorname{Ind} M_0$. Lema este demonstrată.

Observaţia 1.2. *Afirmaţiile lemei sunt adevărate şi în cazul în care funcţiile a,b,c sunt înlocuite prin matrice de ordinul n cu elemente din $C(\mathbb{R})$.*

Observaţia 1.3. *În baza lemei 1.1 ajungem la concluzia că operatorii de forma*

$$H=(x-\delta)^{\lambda}S(x-\delta)^{-\lambda}-S, \quad -\frac{1+\gamma}{p}<\lambda<1-\frac{1+\gamma}{p},$$

(necompacţi!) reprezintă perturbaţii admisibile pentru operatorul integral singular $aI+bS$ în spatiul L_p^{γ}, proprietatea operatorului $aI+bS$ de a fi noetherian este stabilă în raport cu perturbaţia lui cu operatori de forma H. În plus, nici indicele lui nu se schimbă în rezultatul acestei perturbaţii.

Demonstraţia teoremei 1.2. Aplicăm operatorului (1.5) teorema 1.1. Pentru aceasta vom construi operatorul U care să verifice axiomele 1) şi 2) din această teoremă. În calitate de U considerăm operatorul

$$(U\varphi)(x)=\beta(x)\varphi(x), \text{ unde } \beta(x)=[x-\alpha(x)]/[\alpha(x)-i][x-i].$$

Evident, $\beta(x)\in C(\dot{\mathbb{R}})$ și $\beta(x)\neq 0$ pentru orice $x\in\dot{\mathbb{R}}$. De aceea, operatorul U este inversabil în L_p^γ. Evident că $UV=-VU$. Așa cum funcția $\beta(x)$ este continuă pe $\dot{\mathbb{R}}$, rezultă că operatorul $US-SU$ este compact în L_p^γ și, prin urmare, $AU=UA+T$, unde T este un operator compact. Astfel, operatorul U verifică axiomele 1) și 2) din teorema 1.1. Atunci, din această teoremă rezultă că operatorul A este noetherian în L_p^γ, dacă și numai dacă această proprietate o are operatorul

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} aI+bS & V(c_0I+d_0S)V \\ c_0I+d_0S & V(aI+bS)V \end{Vmatrix} \tag{1.10}$$

în spațiul $(L_p^\gamma)^2=L_p^\gamma\times L_p^\gamma$. În plus, $\operatorname{Ind}A=\frac{1}{2}\operatorname{Ind}\widetilde{A}$.

Dacă $f\in C(\dot{\mathbb{R}})$, atunci $VfV=\widetilde{f}\,I$ $(\widetilde{f}(x)=f(\alpha(x)))$. Să stabilim cum acționează operatorul VSV. Fie $\varphi\in L_p^\gamma$, atunci

$$VSV\varphi=V\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\omega}{(y-\delta)^\lambda}\varphi(\alpha(y))}{y-x}dy=\frac{\omega^2}{\pi i(x-\delta)^\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{(y-\delta)^\lambda}\varphi(\alpha(y))}{y-\alpha(x)}dy\,. \tag{1.11}$$

Așa cum

$$\alpha(x)-\delta=\frac{D}{x-\delta},\quad \alpha(y)-\alpha(x)=\frac{D(y-x)}{(y-\delta)(x-\delta)},\quad \alpha'(y)=-\frac{D}{(y-\delta)^2},$$

după schimbul de variabilă în (1.11), obținem

$$VSV=(x-\delta)^{1-\lambda}S(x-\delta)^{\lambda-1}I\,. \tag{1.12}$$

Înlocuind (1.12) în (1.10), obținem

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} a & \widetilde{c}_0 \\ c_0 & \widetilde{a}\end{Vmatrix}I+\begin{Vmatrix} b & \widetilde{d}_0 \\ d_0 & b\end{Vmatrix}S+\begin{Vmatrix} 0 & \widetilde{d}_0 \\ 0 & \widetilde{b}\end{Vmatrix}H, \tag{1.13}$$

unde $H=(x-\delta)^{1-\lambda}S(x-\delta)^{\lambda-1}I-S$.

În baza lemei 1.1, operatorul $\widetilde{A}$ și operatorul

$$\widetilde{A}_0=\begin{Vmatrix} a & \widetilde{c}_0 \\ c_0 & \widetilde{a}\end{Vmatrix}I+\begin{Vmatrix} b & \widetilde{d}_0 \\ d_0 & b\end{Vmatrix}S$$

sunt în același timp noetherieni și $\operatorname{Ind}\widetilde{A}=\operatorname{Ind}\widetilde{A}_0$. Operatorul $\widetilde{A}_0$ este un operator integral cu coeficienți continui, el este noetherian [7] dacă și numai dacă

$$m_\pm(x)=\left[a(x)\pm b(x)\right]\left[\widetilde{a}(x)\pm\widetilde{b}(x)\right]-\left[c_0(x)\pm d_0(x)\right]\left[\widetilde{c}_0(x)\pm\widetilde{d}_0(x)\right]\neq 0$$

și $\operatorname{Ind}\widetilde{A}_0=-\operatorname{ind}\left[m_+(x)/m_-(x)\right]$. Rămâne să observăm că $m_\pm(x)=\Delta_\pm(x)$. Teorema este demonstrată.

Corolarul 1.1. *Problema Riemann la frontieră*

$$A(x)\Phi^+(x)+B(x)\Phi^-(x)+C(x)\Phi^+(\alpha(x))+D(x)\Phi^-(\alpha(x))=F(x)$$

cu translație omografică și cu coeficienții $A(x),B(x),(x-\delta)^\lambda C(x),\ (x-\delta)^\lambda D(x)$ *din* $C(\dot{\mathbb{R}})$ *este noetheriană în spațiul* L_p^γ, *dacă și numai dacă*

$$\Delta_1(x)=A(x)\widetilde{A}(x)-C(x)\widetilde{C}(x)\neq 0,\ \ \Delta_2(x)=B(x)\widetilde{B}(x)-D(x)\widetilde{D}(x)\neq 0.$$

Indicele κ *al problemei noetheriene se calculează din formula*

$$\kappa=-\frac{1}{2}\operatorname{ind}\left[\Delta_1(x)/\Delta_2(x)\right].$$

Trecem la studiul operatorului B, definit de relația (1.2).

Spre deosebire de operatorul A, operatorul B nu are forma (1.5), el are forma

$$B=B_1+B_2V.$$

Pentru a aplica schema generală din teorema 1.1, avem nevoie anume de forma (1.3). Cu ajutorul relației (1.12) putem obține o reprezentare de forma (1.3), însă cu prețul „*înrăutățirii*” formei operatorului A_2, care participă în egalitatea (1.3). Operatorul B poate fi transcris sub forma

$$B = B_1 + VB_2', \tag{1.14}$$

unde $B_1 = aI + bS$, $B_2' = \tilde{c}_0 I + (x-\delta)^{1-\lambda} S (x-\delta)^{\lambda-1} \tilde{d}_0 I$.

Vom aplica operatorului (1.14) teorema 1.1. Definim operatorul U din această teoremă, ca și la demonstrația teoremei 1.2. Verificăm axiomele 1) și 2). Avem $VU = -UV$. Calculăm $B_2'U - UB_2'$. Avem

$$B_2'U - UB_2' = (x-\delta)^{1-\lambda} S (x-\delta)^{\lambda-1} \cdot \beta(x) \tilde{d}_0(x) I -$$
$$- \beta(x)(x-\delta)^{1-\lambda} S (x-\delta)^{\lambda-1} \tilde{d}_0(x) I = (x-\delta)^{1-\lambda} [S\beta(x)I - \beta(x)S] \tilde{d}_0(x)(x-\delta)^{\lambda-1}.$$

Așa cum operatorul $T = S\beta I - \beta S$ este compact în spațiul $L_p^{\gamma+(1-\lambda)p}$ (observăm că funcția $\beta(x)$ este continua pe $\bar{R}$ și $-1 < \gamma + (1-\lambda)p < p-1$), atunci din relația $B_2'U - UB_2' = (x-\delta)^{1-\lambda} T (x-\delta)^{\lambda-1} I$ rezultă compacticitatea operatorului $B_2'U - UB_2'$ în $L_p^{\gamma+(1-\lambda)p}$. Deci, axiomele 1) și 2) sunt îndeplinite.

Operatorul matriceal (1.13), definit pentru B în corespundere cu teorema 1.2, are forma

$$\tilde{B} = \begin{Vmatrix} a & c_0 \\ \tilde{c}_0 & \tilde{a} \end{Vmatrix} I + \begin{Vmatrix} b & d_0 \\ \tilde{d}_0 & \tilde{b} \end{Vmatrix} S + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{d}_0 & \tilde{b} \end{Vmatrix} M$$

(scris cu exactitatea unui termen compact). Aplicând lema 1.1, obținem

Teorema 1.3. *Pentru ca operatorul* B *să fie noetherian în spațiul* L_p^γ, *este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile*

$$m_\pm(x) = [a(x) \pm b(x)][\tilde{a}(x) \pm (x)] - [c_0(x) \pm d_0(x)][\tilde{c}_0(x) \pm \tilde{d}(x)] \neq 0.$$

În acest caz,

$$\operatorname{Ind} B = -\frac{1}{2} \operatorname{ind}[m_+(x)/m_-(x)].$$

Observația 1.4. *Din teoremele 1.2 și 1.3 rezultă că operatorii* A *și* B *sunt noetherieni simultan și* $\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} B$.

II. Algebre de operatori integrali singulari cu translații (inverse) în spațiul $L_p(R, \rho)$

În acest paragraf vom studia algebra generată de operatorii $aI\,(a \in CP(R))$, $S-$ operatorul cu nucleu Cauchy și operatorul de translație V, care va fi ulterior definit. Pentru operatorii din această algebră se definește simbolul. În limbajul simbolului sunt stabilite condițiile necesare și suficiente în care operatorii cu translație sunt noetherieni. Indicele operatorior noetherieni se calculează cu ajutorul simbolurilor.

Vom începe prin a introduce câteva notații.

Fie Γ un contur Liapunov pe porțiuni (mărginit sau nemărginit). Notăm cu $\Sigma^m(\Gamma,\rho)$ algebra generată de operatorii

$$M = aI + bS_\Gamma \ (a, b \in CP_m(\Gamma)),$$

care acționează în spațiul $L_p^m(\Gamma,\rho)$, unde

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{n} |t - t_k|^{\beta_k}.$$

Notăm prin $\Sigma^m(\Gamma,\rho;B)$ subalgebra algebrei $L(L_p^m(\Gamma,\rho))$ care conține algebra $\Sigma^m(\Gamma,\rho)$ și operatotrul B. Dacă $m=1$, atunci punem $\Sigma^1(...) = \Sigma(...)$.

Așa cum am convenit, două algebre $A_1 (\subset L(B_1))$ și $A_2 (\subset L(B_2))$ le numim echivalente, dacă există un operator inversabil $M \in L(B_1, B_2)$, astfel încât mulțimea operatorilor de forma $MAM^{-1}(A \in A_1)$ coincide cu algebra A_2.

II.1. Operatori integrali singulari cu translația $\alpha(x)=-x$

Fie $\Gamma=\mathbb{R}$, $\rho(x)=|x+1|^{\omega_0}|x|^{\omega_1}|x-1|^{\omega_2}$, unde $-1<\omega_0<p-1,\ -1<\omega_1<p-1,\ -1<2\omega_0+\omega_1<p-1.$ Considrerăm cazul particular $\alpha(x)=-x.$ Fie

$$(V_0\varphi)(x)=\varphi(-x).$$

Din rezultatele lucrării [10] se poate deduce că algebra $\Sigma^m(\Gamma,\rho;V_0)$ este echivalentă cu algebra $\Sigma^2(\mathbb{R}^+,\tilde{\rho})$, unde $\mathbb{R}^+=[0;\infty)$ și $\tilde{\rho}(x)=|x|^{\frac{\omega_1-1}{2}}|x-1|^{\omega_0}$, iar algebra $\Sigma^2(\mathbb{R}^+,\tilde{\rho})$ este algebră cu simbol. Fie $A\in\Sigma(\mathbb{R},\rho;V_0)$, atunci $MAM^{-1}=\tilde{A}\in\Sigma^2(\mathbb{R},\tilde{\rho})$. Convenim să notăm prin $\mathcal{A}(x,\xi)$ $(x\in\mathbb{R}^+,\xi\in\mathbb{R})$ matricea $\varphi(MAM^{-1})$. Această matrice este simbolul operatorului $A(\in\Sigma(\mathbb{R},\rho;V_0))$. În continuare, simbolul operatorului A se va scrie sub forma de blocuri de ordinul doi:

$$\mathcal{A}(x,\xi)=\left\|\sigma_{ij}(x,\xi)\right\|_{i,j=1}^{2}\ (x\in\overline{\mathbb{R}},\xi\in\overline{\mathbb{R}}).$$

Ținând cont de rezultatele din §1, putem enunța următorul rezultat.

Teorema 2.1. *Fie $A\in\Sigma(\mathbb{R},\rho;V_0)$ și $\mathcal{A}(x,\xi)$ simbolul lui. Operatorul A este noetherian în $L_p(\Gamma,\rho)$, dacă și numai dacă* $\det\mathcal{A}(x,\xi)\neq 0$ $(x\in\overline{\mathbb{R}}^+,\xi\in\overline{\mathbb{R}})$. *Dacă această condiție este satisfăcută, atunci*

$$\operatorname{Ind}A=-\frac{1}{2\pi i}\left\{\arg\frac{\det\mathcal{A}(x,\xi)}{\det\sigma_{22}(x,-\infty)\cdot\det\sigma_{22}(x,+\infty)}\right\}_{\substack{x\in\overline{\mathbb{R}}^+\\ \xi\in\overline{\mathbb{R}}}}.$$

Pentru a scrie în mod explicit simbolul operatorilor A din algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V_0)$, este suficientă cunoașterea simbolului operatorilor aI,S și V_0. Vom scrie simbolul acestor operatori.

Definim următoarele funcții

$$\omega(x)=\begin{cases}\omega_1, & \text{pentru } x=0,\\ \omega_0, & \text{pentru } x=1,\\ \dfrac{\omega_1-1}{2}+\omega_0, & \text{pentru } x=+\infty,\\ 0, & \text{pentru } x\in\overline{\mathbb{R}}\setminus\{0,1+\infty\}.\end{cases}$$

$$l_x(\xi)=\frac{\exp[2\pi(\xi+i(1+\omega(x))/p)]}{\exp[2\pi\xi+i(1+\omega(x))/p]-1}\ \text{ și }\ m_x(\xi)=2l_x(\xi)-1.$$

După un șir de calcule și transformări (nu ne vom opri la detalii), obținem că simbolurile $S(x,\xi), a(x,\xi), V_0(x,\xi)$ operatorilor $S=S_{\mathbb{R}}$, aI și V_0 sunt definite de următoarele relații:

$$S(x,\xi)=\begin{Vmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1\end{Vmatrix}\ (x\in\mathbb{R}^+\setminus\{0,\infty\}),$$

$$S(0,\xi)=\begin{Vmatrix}S_0^+(\xi) & -S_0^-(\xi)\\ S_0^-(\xi) & -S_0^+(\xi)\end{Vmatrix},\ S_0^{\pm}(\xi)=\frac{1}{2}\begin{Vmatrix}m_0(\xi)\pm m_0^{-1}(\xi) & 0\\ 0 & -(1\pm 1)\end{Vmatrix}$$

$$S(\infty,\xi)=\begin{Vmatrix}S_\infty^+(\xi) & -S_\infty^-(\xi)\\ S_\infty^-(\xi) & -S_\infty^+(\xi)\end{Vmatrix},\ S_\infty^{\pm}(\xi)=\frac{-1}{2}\begin{Vmatrix}m_\infty(\xi)\pm m_\infty^{-1}(\xi) & 0\\ 0 & -(1\pm 1)\end{Vmatrix}$$

Definim simbolul $a(x,\xi)$ al operatorului aI prin relațiile

$$a(x,\xi)=\begin{Vmatrix}l_x(\xi)\tilde{a}(x+0)+(1-l_x(\xi))\tilde{a}(x-0) & h_x(\xi)(\tilde{a}(x+0)-\tilde{a}(x-0))\\ h_x(\xi)(\tilde{a}(x+0)-\tilde{a}(x-0)) & l_x(\xi)\tilde{a}(x+0)+(1-l_x(\xi))\tilde{a}(x-0)\end{Vmatrix},$$

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.13-29

unde

$$\tilde{a}(x) = \begin{Vmatrix} a(\sqrt{x}) & 0 \\ 0 & a(-\sqrt{x}) \end{Vmatrix} \quad (x \in \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus \{0, \infty\})$$

și $h_x(\xi)$ este o ramură fixată a funcției $\sqrt{l_x(\xi)(1 - l_x(\xi))}$,

$$a(0,\xi) = \begin{Vmatrix} a(+0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(-0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(+0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(-0) \end{Vmatrix}, \; a(\infty,\xi) = \begin{Vmatrix} a(+\infty) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(-\infty) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(+\infty) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(-\infty) \end{Vmatrix}.$$

Simbolul $V_0(x,\xi)$ al operatorului $(V_0\varphi)(x) = \varphi(-x)$ are forma

$$V_0(x,\xi) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Simbolul oricărui operator $A \in \Sigma(\mathbb{R}, \rho; V)$ se formează cu ajutorul simbolurilor operatorilor S, aI și V_0. În particular, dacă $A = aI + bS + V_0(cI + dS)$, atunci simbolul lui are forma

$$\mathrm{A}(x,\xi) = a(x,\xi) + b(x,\xi)S(x,\xi) + V_0(x,\xi)(c(x,\xi) + d(x,\xi)S(x,\xi))$$

și condițiile

$$\inf_{x \in \overline{\mathbb{R}}^+, \xi \in \overline{\mathbb{R}}} |\det A(x,\xi)| > 0$$

sunt necesare și suficiente, în care A este noetherian în spațiul $L_p(\Gamma, \rho)$.

II.2. Cazul derivatei $\alpha'(t)$ holderiene

Fie aplicaţia $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ îndeplinește condițiile:

(i) $\alpha(\infty) = \infty$;

(ii) există $\alpha'(x) \in H(\overline{\mathbb{R}})$, unde $H(\overline{\mathbb{R}})$ este mulțimea tuturor funcțiilor care satisfac condițiile lui Hölder pe $\overline{\mathbb{R}}$:

$$|\alpha'(x_1) - \alpha'(x_2)| \le c \frac{|x_1 - x_2|^\mu}{(1 + |x_1|)^\mu (1 + |x_2|)^\mu},$$

c este o constantă și $0 < \mu < 1$.

(iii) $\alpha(\alpha(x)) \equiv x$.

Evident, aplicația $\alpha(x) = -x$ îndeplinește condițiile (i)-(iii).

Așa cum punctul $z = \infty$ este fix pentru aplicația α, atunci α schimbă orientarea pe $\mathbb{R}$. Notăm cu x_0 al doilea punct fix al aplicației α $(\alpha(\infty) = \infty,\ \alpha(x_0) = x_0)$. Considerăm algebra $\Sigma(\mathbb{R}, \rho; V)$, unde $(V\varphi)(x) = \varphi(\alpha(x))$ și $\rho(x) = |x - x_0|^\gamma$ $(1 < \gamma < p - 1)$.[1]

Vom reduce studiul algebrei $\Sigma(\mathbb{R}, \rho; V)$ la algebra $\Sigma(\mathbb{R}, \rho_0; V_0)$ $(\rho_0(x) = |x|^\gamma, (V_0\varphi)(x) = \varphi(-x))$, demonstrând că aceste două algebre sunt echivalente. Aceasta ne va permite să extindem simbolul de pe $\Sigma(\mathbb{R}, \rho_0; V_0)$ pe algebra $\Sigma(\mathbb{R}, \rho; V)$ și să calculăm indicele operatorilor noetherieni.

Teorema 2.2. *Algebra $\Sigma(\mathbb{R}, \rho; V)$ este echivalentă cu algebra $\Sigma^2(\mathbb{R}^+, \tilde{\rho})$, unde*

$$\tilde{\rho}(x) = |x|^\beta \left(\beta = \frac{\gamma + 1}{2}\right).$$

[1] *Menționăm că rezultatele acestei secțiuni rămân adevărate și pentru clase mai generale de spații.*

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.13-29

În baza raționamentelor de mai sus, este suficient a demonstra că $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$ este echivalentă cu algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0)$, unde $\rho_0(x)=|x|^\gamma$ și $(V_0\varphi)(x)=\varphi(-x))$. Pentru a demonstra această afirmație, vom avea nevoie de următoarea lemă.

Lema 2.1. *Fie* $\alpha:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ *îndeplinește condițiile (i)-(iii). Atunci există o astfel de aplicație* $\nu:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$, *care verifică condițiile*

$$\nu'(x)\in H(\overline{\mathbb{R}}),\qquad \nu'(x)\neq 0\ \ (x\in\overline{\mathbb{R}}), \tag{2.1}$$

$$(\nu^{-1}\circ\alpha\circ\nu)(x)\equiv -x, \tag{2.2}$$

unde $\alpha\circ\nu$ *înseamnă compoziția aplicațiilor* ν *și* α.

Demonstrație. Fie $\mu:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ o aplicație care îndeplinește condițiile $\mu(x_0)=0,\ \ \mu(\infty)=\infty,\ \ 0\neq\mu'(x)\in H(\overline{\mathbb{R}})$. Atunci aplicația $\lambda=\mu\circ\alpha\circ\mu^{-1}:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ verifică condițiile:

$$\lambda(\lambda(x))\equiv x,\ \ 0\neq\lambda'(x)\in H(\overline{\mathbb{R}})\ \text{și}\ \lambda(0)=0.$$

Considerăm o aplicație $\eta:\overline{\mathbb{R}^-}\to\overline{\mathbb{R}^+}$ care îndeplinește condițiile $0\neq\eta'(x)\in H(\overline{\mathbb{R}^-}),\ \eta(0)=0,\ \eta(\infty)=\infty$. Prelungim funcția η pe toată axa $\overline{\mathbb{R}}$, considerând $\eta(x)=-\eta(\lambda(x))$ pentru $x\in\mathbb{R}^+$.

Notăm

$$\eta'(0+0)=\lim_{\mathbb{R}^+\ni x\to 0}\eta'(x)\ \text{și}\ \eta'(0-0)=\lim_{\mathbb{R}^-\ni x\to 0}\eta'(x).$$

Așa cum $\eta'(0-)=-\eta'(0+)\cdot\lambda'(0)$ și $\lambda'(0)=-1,$ rezultă că $\eta'(0-)=\eta'(0+).$ În mod similar se verifică egalitatea $\eta'(+\infty)=\eta'(-\infty).$ Astfel, funcția $\eta'(x)$ este holderiană pe toată axa $\overline{\mathbb{R}}$ și este diferită de zero.

Punem $\nu=\mu^{-1}\circ\eta^{-1}.$ Din proprietățile funcțiilor $\mu(x)$ și $\eta(x)$ se deduce că aplicația ν îndeplinește condițiile (2.1) și (2.2). Lema este demonstrată.

Demonstrația teoremei. Fie funcția $\nu:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ definită în lema 2.1 și $(M\varphi)(x)=\varphi(\nu(x)).$ Vom arăta că operatorul M este mărginit din $L_p(\mathbb{R},\rho)$ în $L_p(\mathbb{R},\rho_0).$ Fie $\tau(x)=\nu^{-1}(x)$ și $\varphi\in L_p(\mathbb{R},\rho)$, atunci

$$\|M\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{R},\rho_0)}=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\nu(x))|\,|x|^\gamma\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p\,|\tau(x)|^\gamma\,|\tau'(x)|dx\leq$$

$$\leq\max_x|\tau'(x)|\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p\,|x-x_0|^\gamma\left|\frac{\eta(x)}{x-x_0}\right|dx \tag{2.3}$$

Așa cum

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\tau(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\tau(x)-\tau(x_0)}{x-x_0}=\tau'(x_0)\neq 0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\tau(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to\infty}\eta'(x)=\eta'(\infty)\neq 0,$$

atunci din (2.3) rezultă că

$$\|M\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{R},\rho_0)}\leq\sup_{x\in\mathbb{R}}|\tau'(x)|\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\tau(x)-x}{x-x_0}\right|^\gamma\|\varphi\|^p_{L_p(\mathbb{R},\rho)}.$$

Evident, operatorul M este inversabil și $(M^{-1}\psi)(x)=\psi(\tau(x)).$ Din lema 2.1 rezultă că $MVM^{-1}=V_0$. Deoarece funcția $\nu'(x)\in H(\overline{\mathbb{R}})$ și $\nu'(x)\neq 0,$ atunci operatorul $MSM^{-1}-S$ este compact în $L_p(\mathbb{R},\rho_0).$ Se știe din [1] că operatorii compacți aparțin algebrei $\Sigma(\mathbb{R},\rho_0),$ prin urmare și algebrei $\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0).$ Așa cum $MaM^{-1}=a(\nu(x))I\in CP(\overline{\mathbb{R}})$ pentru orice funcție $a\in CP(\overline{\mathbb{R}}),$ atunci $MAM^{-1}\in\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0)$ pentru orice operator $A\in\Sigma(\mathbb{R},\rho;V).$ Cu aceasta demonstrația teoremei este încheiată.

Fie $A\in\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$. Notăm prin $\mathsf{A}(x,\xi)$ simbolul operatorului MAM^{-1} în algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0).$ Matricea $\mathsf{A}(x,\xi)$ o vom numi simbol al operatorului A în algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$ și o vom scrie sub forma

$$\mathrm{A}(x,\xi)=\begin{Vmatrix}\sigma_{11}(x,\xi) & \sigma_{12}(x,\xi)\\ \sigma_{21}(x,\xi) & \sigma_{22}(x,\xi)\end{Vmatrix},\ (x\in\overline{\mathrm{R}}^{+},\ \xi\in\overline{\mathrm{R}}).$$

În baza proprietăților simbolului din algebra $\Sigma(\mathrm{R},\rho_0;V_0)$, obținem

Teorema 2.3. *Operatorul* $A\in\Sigma(\mathrm{R},\rho;V)$ *este noetherian în spațiul* $L_p(\mathrm{R},\rho)$, *dacă și numai dacă* $\inf\limits_{x\in\overline{\mathrm{R}}^{+},\xi\in\overline{\mathrm{R}}}\left|\det A(x,\xi)\right|>0$. *Dacă această condiție este îndeplinită, atunci*

$$\operatorname{Ind}A=-\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\frac{\det A(x,\xi)}{\det\sigma_{22}(x,-\infty)\det\sigma_{22}(x,+\infty)}\right\}_{\substack{x\in\overline{\mathrm{R}}^{+}\\ \xi\in\overline{\mathrm{R}}}}.$$

În încheierea acestei secțiuni considerăm în spațiul $L_p(\mathrm{R},\rho)$ problema la frontieră Riemann cu translație:

$$a(x)\Phi^{+}(x)+b(x)\Phi^{-}(x)+c(x)\Phi^{+}(\alpha(x))+d(x)\Phi^{-}(\alpha(x))=f(x)\tag{2.4}$$

cu coeficienții $a,b,c,d\in CP(\overline{\mathrm{R}})$. Funcțiile $\Phi^{+}(z)$ $(\operatorname{Im}z>0)$ și $(\operatorname{Im}z<0)$ pot fi reprezentate cu ajutorul integralei Cauchy. De aceea, avem

$$\Phi^{\pm}(x)=\pm\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}dy\quad(x\in\mathrm{R}\ \text{și}\ \varphi\in L_p(\mathrm{R},\rho)).$$

Astfel, problema (2.4) este echivalentă cu ecuația

$$aP\varphi-bQ\varphi+V(\tilde{c}P-\tilde{d}Q)\varphi=f,\tag{2.5}$$

unde $P=\frac{1}{2}(I+S)$, $Q=I-P$ și $\tilde{h}(x)=h(\alpha(x))$. Partea stângă a egalității (2.5) este un operator din algebra $\Sigma(\mathrm{R},\rho;V)$ și din teorema 2.3 rezultă

Corolarul 2.1. *Problema la frontieră (2.4) este noetheriană în spațiul* $L_p(\mathrm{R},\rho)$, *dacă și numai dacă determinantul simbolului ei este diferit de zero pe* $\overline{\mathrm{R}}^{+}\times\overline{\mathrm{R}}$. *Dacă această condiție este satisfăcută, atunci indicele problemei se exprimă prin simbolul ei.*

II.3. Cazul translației homografice arbitrare

În această secțiune vom considera operatorul

$$(A\varphi)(x)\equiv a(x)\varphi(x)+\frac{b(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{y-x}dy+c(x)\varphi(\alpha(x))+\frac{d(x)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-\alpha(x)}dy\tag{2.6}$$

și algebra generată de astfel de operatori în cazul în care

$$\alpha(x)=\frac{\delta x+\beta}{x-\delta}$$

cu condiția $D=\delta^2+\beta>0$. Din ultima condiţie deducem că α schimbă orientarea pe R și punctele $x_1=\delta-\sqrt{\delta^2+\beta}$, $x_2=\delta+\sqrt{\delta^2+\beta}$ sunt puncte fixe pentru aplicația α. Observăm că operatorul de translație în forma obișnuită, $(V\varphi)(x)=\varphi(\alpha(x))$, nu este mărginit în spațiul $L_p(\mathrm{R},\rho)$, unde

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\beta_k}\quad(-1<\beta_k<p-1,\ -1<\sum_{k=1}^{n}\beta_k<p-1).\tag{2.7}$$

Într-adevăr, fie, de exemplu, $\rho(x)=\left|x-\delta\right|^{\gamma}$ $(-1<\gamma<p-1)$, atunci

$$\left\|V\varphi\right\|^{p}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(\alpha(x))\right|^{p}\left|x-\delta\right|^{\gamma}dx=D^{\gamma+1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(x)\right|^{p}\frac{dx}{\left|x-\delta\right|^{\gamma+2}}$$

și V este mărginit doar pentru $\gamma=-1$. Pe de altă parte, însă, $-1<\gamma<p-1$, ceea ce este imposibil.

Ținând cont de aceste circumstanțe, vom defini operatorul V în felul următor

$$(V\varphi)(x)=\frac{\sqrt{D}}{x-\delta}\varphi(\alpha(x)), \tag{2.8}$$

iar în calitate de pondere vom lua funcția $\rho(x)=|x-\delta|^{\beta_0}|x-x_1|^{\beta_1}|x-x_2|^{\beta_2}$, unde

$$-1<\beta_1+\beta_2<p-1,\ \beta_0=\frac{p-2-\beta_1-\beta_2}{p} \text{ și } -1<\frac{p-2\pm(\beta_1+\beta_2)}{2}<p-2. \tag{2.9}$$

Ultimele condiții impuse numerelor $\beta_j\,(j=0,1,2)$ asigură continuitatea operatorului S în spațiul $L_p(\mathbb{R},\rho)$. În plus, are loc

Teorema 2.4. *Operatorul V ce acționează din spațiul $L_p(\mathbb{R},\rho)$ în el însuși este involutiv și mărginit în acest spațiu.*

Demonstrație. Fie $\varphi\in L_p(\mathbb{R},\rho)$, atunci

$$\|V\varphi\|^p=D^{p/2}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\alpha(x))|^p|x-\delta|^{-p}\rho(x)dx=3=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p|x-\delta|^{p-2-\beta_0-\beta_1-\beta_2}|x-x_1|^{\beta_1}|x-x_2|^{\beta_2}dx=\|\varphi\|^p.$$

Așadar, $\|V\|=1$. Se mai observă că $V^2=I$. Teorema este demonstrată.

Având în vedere de a scrie operatorul (2.6) sub forma $A=A_1+VA_2$, unde A_1 și A_2 sunt operatori de forma $aI+bS\ (a,b\in CP(\overline{\mathbb{R}}))$, vom cere ca funcțiile

$$c_0(x)=\frac{\sqrt{D}}{x-\delta}c(\alpha(x)) \text{ și } d_0(x)=\frac{\sqrt{D}}{x-\delta}d(\alpha(x))$$

să aparțină mulțimii $CP(\overline{\mathbb{R}})$. Atunci

$$A=aI+bS+V(c_0I+d_0S). \tag{2.10}$$

Teorema 2.5. *Algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$ este echivalentă cu algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0)$, unde*

$$\rho_0(x)=|x+1|^{\beta_0}|x|^{\beta_1}|x-1|^{\beta_0} \text{ și } (V_0\varphi)(x)=\varphi(-x).$$

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, putem considera că $D=\delta^2+\beta=1$. În caz contrar, această condiție o putem obține cu ajutorul operatorului inversabil $(N\varphi)(x)=\varphi(\sqrt{D}\cdot x)$. Într-adevăr, se observă ușor că $NSN^{-1}=S$ și

$$(NVN^{-1}\varphi)(x)=\frac{1}{x-\delta/\sqrt{D}}\varphi\left(\frac{x\delta/\sqrt{D}+\beta/D}{x-\delta/\sqrt{D}}\right),$$

unde $\left(\frac{\delta}{\sqrt{D}}\right)^2+\frac{\beta}{D}=1$. Așadar, vom presupune că $D=1$, iar în acest caz $x_1=\delta-1$ și $x_2=\delta+1$.

Vom demonstra că operatorul M_1, definit prin relația

$$(M_1\varphi)(y)=\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{\delta y+1}{y}\right),$$

este liniar și mărginit din $L_p(\mathbb{R},\rho)$ în $L_p(\mathbb{R},\rho_1)$, cu ponderea

$$\rho_1(x)=|x-\delta|^{\beta_0}|x-x_1|^{\beta_1}|x-x_2|^{\beta_2}.$$

Într-adevăr, fie $\varphi\in L_p(\mathbb{R},\rho)$, atunci

$$\|M_1\varphi\|^p_{L_p(\Gamma,\rho_1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{\delta y+1}{y}\right)\right|^p|y|^{\beta_0}|y+1|^{\beta_1}|y-1|^{\beta_2}dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^p|x-\delta|^{\beta_0}|x-x_1|^{\beta_1}|x-x_2|^{\beta_2}dx=\|\varphi\|^p_{L_p(\Gamma,\rho)}.$$

Prin urmare, operatorul M_1 este linear și mărginit. În plus, el este inversabil și

$$(M_1^{-1}\psi)(t)=\frac{1}{t-\delta}\psi\left(\frac{1}{t-\delta}\right).$$

Se arată ușor că $M_1SM_1^{-1}=S$. Așa cum $M_1aM_1^{-1}=a\left(\frac{\delta y+1}{y}\right)I \quad (a\in CP(\mathbb{R}))$ și $(M_1VM_1^{-1}\varphi)(y)=\frac{1}{y}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)$, atunci $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)\sim\Sigma(\mathbb{R},\rho_1;V_1)$, unde $(V_1\varphi)(x)=\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

Cu ajutorul operatorului inversabil

$$(M_2\varphi)(x)=\frac{1}{x+1}\varphi\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\ \left((M_2^{-1}\psi)(t)=\frac{2}{1-t}\psi\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)$$

se stabilește în mod similar că algebrele $\Sigma(\mathbb{R},\rho_1;V_1)$ și $\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0)$ sunt echivalente (observăm că $M_2V_1M_2^{-1}=-V_0\in\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0)$.

Fie $M=M_2M_1$. Atunci, în baza celor deja stabilite, avem $MAM^{-1}\in\Sigma(\mathbb{R},\rho_0;V_0)$ pentru orice $A\in\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$ și teorema este demonstrată.

Am putea enunța și corolarul 2.1 pentru problema la frontieră cu translație homografică, însă la aceasta nu ne vom opri.

Teorema demonstrată, împreună cu teorema 2.3, ne permit să definim simbolul pentru operatorul din algebra $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$, să stabilim criterii în care operatorii din $\Sigma(\mathbb{R},\rho;V)$ sunt noetherieni, precum și formula pentru calcularea indicelui acestor operatori. Astfel, problema noetheriană pentru operatori cu translație homografică și cu coeficienți continui pe porțiuni este complet rezolvată.

III. Operatorul (2.6) cu coeficienți continui în punctele fixe ale translației α

Următorul exemplu ne arată că în cazul în care coeficienții operatorului (2.6) sunt funcții discontinue, atunci raționamentele de mai sus nu mai pot fi folosite în studiul acestui operator.

Fie aplicația $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ îndeplinește condițiile de mai sus, x_1 și x_2 – punctele fixe ale lui α, iar $\rho(x)$ ponderea definită prin 2.1 sau 2.2. Operatorului de forma

$$A=aI+bS+(cI+dS)V \tag{3.1}$$

în spațiul $L_p(\mathbb{R},\rho)$ îi asociem operatorul

$$A_v=\begin{Vmatrix} a & \tilde{c}\\ c & \tilde{a}\end{Vmatrix}I+\begin{Vmatrix} b & -\tilde{d}\\ d & -\tilde{b}\end{Vmatrix}S\ \ (\tilde{f}(x)=f(\alpha(x))) \tag{3.2}$$

care acționează în spațiul $L_p^2(\mathbb{R},\rho)$. Dacă funcțiile a,b,c,d sunt continue pe $\overline{\mathbb{R}}$, atunci [9] are loc următoarea teoremă.

Teorema 3.1. *Operatorul A este noetherian în $L_p(\mathbb{R},\rho)$, dacă și numai dacă este noetherian operatorul A_v. Dacă A este noetherian, atunci* $\mathrm{Ind}\,A=\frac{1}{2}\mathrm{Ind}\,A_v$.

Corolarul 3.1. *Fie $a,b,c,d\in C(\overline{\mathbb{R}})$. Operatorul (2.6) este noetherian în spațiul $L_p(\mathbb{R},\rho)$, dacă și numai dacă*

$$\Delta(t)=(a(t)+b(t))(\tilde{a}(t)-\tilde{b}(t))-(c(t)+d(t))(\tilde{c}(t)-\tilde{d}(t))\neq 0.$$

Dacă această condiție este verificată, atunci $\mathrm{Ind}\,A=-\mathrm{ind}\,\Delta(t)$.

Însă, dacă a,b,c,d au puncte de discontinuitate de speța întâi pe $\overline{\mathbb{R}}$, atunci din faptul că A_V este noetherian rezultă că și A este noetherian. Reciproca acestei propoziții este, în general, falsă. Într-adevăr, fie (a se compara cu [6])

$$A=I+\delta\chi(x)SV$$

unde $\delta = \text{const}$, χ este funcția caracteristică a mulțimii $\overline{\mathbb{R}^+}$ și $(V\varphi)(x) = \varphi(-x)$. Operatorul A aparține algebrei $\Sigma(\mathbb{R}, V) = \Sigma(\mathbb{R}, 1; V)$, studiată la începutul paragrafului precedent, și simbolul lui în spațiul $L_2(\mathbb{R})$ are forma

$$A(x,\xi) = \begin{Vmatrix} a_{11}(x,\xi) & 0 \\ 0 & a_{22}(x,\xi) \end{Vmatrix}, \text{ unde } a_{22}(x,\xi) = \begin{Vmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$a_{11}(x,\xi) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} & \text{pentru } x \neq 0 \quad \text{și } x = \infty; \\ \begin{Vmatrix} 1 + i\delta \sin \pi f(\xi) & \delta \cos \pi f(\xi) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} & \text{pentru } x = 0 \text{ și } x = \infty, \end{cases}$$

și $f(\xi) = e^{2\pi\xi} / (e^{2\pi\xi} + 1)$. Așadar, $\det A(x,\xi) = 1$ pentru $x \neq 0$ și $x \neq \infty$. În punctele $x = 0$ și $x = \infty$ avem

$$\det A(0,\xi) = \det A(\infty,\xi) = 1 + i\delta \sin \pi f(\xi).$$

Dacă luăm $\delta = -i$, atunci $\det A(x,\xi) \neq 0 \quad \forall (x,\xi) \in \overline{\mathbb{R}^+} \times \overline{\mathbb{R}}$ și, prin urmare, operatorul $I - i\chi(x)SV$ este noetherian în spațiul $L_2(\mathbb{R})$. Însă, dacă $\delta = i$, atunci $\det A(0,0) = 0$ și, prin urmare, operatorul $I + i\chi(x)SV$ nu este noetherian în $L_2(\mathbb{R})$.

Fie $B = I - i\chi(x)SV$ și $C = I + i\chi(x)SV$; din cele menționate mai sus B este noetherian în $L_2(\mathbb{R})$, iar C nu este noetherian. Atunci, în baza egalității

$$\begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} I & -V \\ I & V \end{Vmatrix} B_V \begin{Vmatrix} I & I \\ -V & V \end{Vmatrix}$$

și inversabilității operatorilor

$$\begin{Vmatrix} I & -V \\ I & V \end{Vmatrix} \text{ și } \begin{Vmatrix} I & I \\ -V & V \end{Vmatrix},$$

rezultă că B_V nu este noetherian în $L_2^2(\mathbb{R})$.

În acest exemplu, dificultățile suplimentare care au apărut în studiul operatorului de forma (2.6) sunt condiționate de faptul că coeficienții operatorului sunt funcții discontinue în punctele fixe ale aplicației $\alpha(x) = -x$ și teorema 3.1, partea ei necesară, nu mai are loc. Vom arăta că în cazul în care coeficienții operatorului A sunt continui în punctele fixe ale aplicației $\alpha(x)$, atunci teorema 3.1 rămâne adevărată. Pentru a demonstra această afirmație, vom avea nevoie de principiul local al lui I.Gohberg și N.Krupnik [6], pe care îl vom modifica astfel, încât să-l putem aplica în studiul operatorilor integrali singulari cu translații (care nu posedă așa-numita proprietate locală).

III.1. Principiul local

Două matrici de funcții $a = \|a_{jk}\|$ și $b = \|b_{jk}\|$ cu elemente din $CP(\Gamma)$ se numesc echivalente în punctul $\tau \in \Gamma$, notația $a \overset{\tau}{\sim} b$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $u(\tau)$ a punctului τ, încât

$$|a_{jk}(t) - b_{jk}(t)| < \varepsilon \quad (t \in u(\tau), 1 \leq j,k \leq m).$$

Teorema 3.2. *Fie* $a_j \overset{\tau}{\sim} b_j$ *și* $a_j \overset{\alpha(\tau)}{\sim} b_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. *Dacă operatorul* $a_1 I + a_2 S + (a_3 I + a_4 S)V$ *este local noetherian în punctul* τ, *atunci aceeași proprietate o are și operatorul* $b_1 I + b_2 S + (b_3 I + b_4 S)V$.

Teorema 3.3. *Fie* $a_j \overset{\tau}{\sim} a_j^\tau$ *și* $a_j \overset{\alpha(\tau)}{\sim} a_j^\tau$ $(j = 1,2,3,4)$. *Dacă operatorul* $A^\tau = a_1^\tau I + a_2^\tau S + (a_3^\tau I + a_4^\tau S)V$ *este local noetherian pentru orice* $\tau \in \Gamma$, *atunci operatorul* $A = a_1 I + a_2 S + (a_3 I + a_4 S)V$ *este noetherian în spațiul* $L_p^m(\Gamma, \rho)$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.13-29

În teoremele 3.2 și 3.3 funcția $\alpha(t)$ este o aplicație a conturului Γ pe el însuși și verifică condițiile lui Carleman. Demonstrația acestor teoreme este similară cu demonstrația teoremelor respective din [6], de aceea nu o prezentăm. Menționăm doar că aici în calitate de algebră A din [6] se consideră algebra cât $L(L_p^m(\Gamma,\rho))/\mathrm{T}(L_p^m(\Gamma,\rho))$. Clasele localizatoare M_τ reprezintă mulțimea elementelor $x \in \mathrm{A}$ de forma $x = \hat{X}I$, unde $X = diag(x_1, x_2, ..., x_m)$, iar funcțiile $x_j \in CP(\Gamma)$ sunt egale cu 1 într-o vecinătate a punctului τ și verifică condițiile $x_j(t) > 0,\ x_j(\alpha(t)) = x_j(t)$.

III.2. Criterii noetheriene pentru operatorul (2.6) cu coeficienți continui în punctele fixe ale translației α

Teorema 3.4. *Fie $A = aI + bS + (cI + dS)V\ \ (a,b,c,d \in CP(\overline{\mathrm{R}}))$ și $A(x,\xi)$ simbolul definit în secțiunile 2.1 și 2.2. Operatorul A este local noetherian în punctul $\tau_0 \in \overline{\mathrm{R}}$, dacă și numai dacă* $\det A(\tau_0,\xi) \neq 0\ \ (\xi \in \overline{\mathrm{R}})$.

Demonstrație. Considerăm o vecinătate $v(\tau_0)$ a punctului τ_0, încât $\det A(\tau,\xi) \neq 0\ \ (\forall \tau \in u(\tau_0) \setminus \tau_0, \forall \xi \in \overline{\mathrm{R}})$, unde $u(\tau_0) = v(\tau_0) \bigcup \alpha(v(\tau_0))$ și coeficienții operatorului A să nu mai aibă alte puncte de discontinuitate în afară, eventual, de punctele τ_0 și $\alpha(\tau_0)$. Alegem operatorul

$$\widetilde{A} = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S + (\widetilde{c}I + \widetilde{d}S)V\ \ (\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c},\widetilde{d} \in CP(\overline{\mathrm{R}})),$$

astfel încât coeficienții lui pe mulțimea $u(\tau_0)$ să coincidă cu coeficienții respectivi ai operatorului A și $\det \widetilde{A}(\tau,\xi) \neq 0\ \ (\forall \tau \in \overline{\mathrm{R}} \setminus \tau_0, \forall \xi \in \overline{\mathrm{R}})$. Presupunem că $\det A(\tau_0,\xi) \neq 0\ (\xi \in \overline{\mathrm{R}})$, atunci $\det \widetilde{A}(\tau,\xi) \neq 0\ \ (\forall \tau \in \overline{\mathrm{R}}, \forall \xi \in \overline{\mathrm{R}})$. În baza teoremei 2.3 operatorul $\widetilde{A}$ este noetherian, iar din teorema 3.3 deducem că A este local noetherian în punctul τ_0. Reciproc, fie A local noetherian în punctul τ_0, atunci această proprietate o are și operatorul $\widetilde{A}$. Așa cum $\det \widetilde{A}(\tau,\xi) \neq 0\ \ (\forall \tau \in \overline{\mathrm{R}} \setminus \tau_0, \forall \xi \in \overline{\mathrm{R}})$, atunci, în baza celor demonstrate deja, operatorul $\widetilde{A}$ este local noetherian și în punctele $\tau \neq \tau_0$. Astfel, $\widetilde{A}$ este local noetherian în orice punct $\tau \in \mathrm{R}$, deci, în baza teoremei 3.3, este noetherian. Prin urmare, $\det \widetilde{A}(\tau,\xi) \neq 0\ \ (\forall \tau \in \mathrm{R}, \forall \xi \in \overline{\mathrm{R}})$. De aici rezultă că $\det A(\tau_0,\xi) = \det \widetilde{A}(\tau_0,\xi) \neq 0$. Teorema este demonstrată.

Teorema 3.5. *Fie $a,b,c,d\ \ (\in CP(\overline{\mathrm{R}}))$ continue în vecinătățile $u(x_1)$ și $u(x_2)$, unde x_1 și x_2 sunt punctele fixe ale aplicației α. Atunci operatorul A este noetherian în spatiul $L_p(\mathrm{R},\rho)$, dacă și numai dacă noetherian este operatorul A_V și* $\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2} \operatorname{Ind} A_V$.

Demonstrație. Notăm prin M și N operatorii $M = aI + bS$, $N = cI + dS$. Atunci operatorul A se transcrie

$$A = M + NV. \tag{3.3}$$

Ușor se verifică identitatea

$$\begin{Vmatrix} I & V \\ I & -V \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} M & N \\ VNV & VMV \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I & I \\ V & -V \end{Vmatrix} = 2 \begin{Vmatrix} M + NV & 0 \\ 0 & M - NV \end{Vmatrix}. \tag{3.4}$$

În partea stângă a egalității (3.4), factorul din mijloc coincide (cu exactitatea unui termen compact) cu operatrorul A_V. Astfel, teorema va fi demonstrată, dacă vom demonstra că operatoprii $M + NV$ și $M - NV$ sunt simultan noetherieni și indicii lor coincid. Considerăm operatorul

$$H = \frac{\alpha(x) - x}{(\alpha(x) - i)(x - i)} I + h(x)S,$$

unde funcția $h(x)$ verifică următoarele condiții:

1) $h \in C(\overline{\mathrm{R}})$; *2) este egală cu zero pentru* $x \in \mathrm{R} \setminus (u(x_1) \cup u(x_2))$;

3) $h(x) = h(\alpha(x))$; *4)* $\dfrac{\alpha(x) - x}{(\alpha(x) - i)(x - i)} \pm h(x) \neq 0$, $x \in \overline{\mathrm{R}}$.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.13-29

Se verifică ușor [11] că o astfel de funcție există. Menționăm că din condițiile 1) și 4) rezultă că operatorul H este noetherian în $L_p(\mathbb{R},\rho)$. Vom demonstra că operatorii $M+NV$ și $M-NV$ verifică relația

$$(M-NV)H = H(M+NV)+T, \tag{3.5}$$

unde T este un operator compact în $L_p(\mathbb{R},\rho)$, efectuând calculele necesare. Pentru a simplifica calculele, notăm prin $\omega(x)$ funcția

$$\omega(x)=\frac{\alpha(x)-x}{(\alpha(x)-i)(x-i)}.$$

Observăm că $\omega V\varphi=-V\omega\varphi$, adică $\omega V=-V\omega I$ și $hV=VhI$. La verificarea egalității (3.5) vom mai folosi:

a) produsul $\psi\cdot h$ este funcție continuă pe $\overline{\mathbb{R}}$ pentru orice funcție $\psi\in CP(\overline{\mathbb{R}})$ și continuă în vecinătățile $u(x_1)$ și $u(x_2)$,

b) operatorul $gS-SgI$ este compact în $L_p(\mathbb{R},\rho)$ pentru orice funcție g continuă pe $\overline{\mathbb{R}}$,

c) operatorul $VS+SV$ este compact în $L_p(\mathbb{R},\rho)$ și

d) $S^2=I$.

Cu aceste observații obținem:

$$MH=[aI+bS][\omega I+hS]=a\omega I+ahS+bS\omega I+bShS=(a\omega+bh)I+(ah+b\omega)S+T_1, \tag{3.6}$$

$$HM=[\omega I+hS][aI+bS]=a\omega I+b\omega S+hSaI+hSbS=a\omega I+b\omega S+SahI+SbhS+T_2=$$
$$(a\omega+bh)I+(ah+b\omega)S+T_3; \tag{3.7}$$

$$NVH=(cI+dS)V(\omega I+hS)=(cI+dS)(-\omega I-hS)V+T_4=$$
$$-(c\omega+dh)V-(d\omega+ch)SV+T_5; \tag{3.8}$$

$$HNV=(\omega I+hS)(cI+dS)V=(\omega cI+\omega dS+hScI+hSdS)V=$$
$$(\omega cI+\omega dS+hShcI+ShdS)V+T_6=(\omega c++hd)V+(\omega d+ch)SV+T_7, \tag{3.9}$$

unde T_j $(j=1,2,...,7)$ sunt operatori compacți. Din relațiile (3.6)-(3.9) rezultă că $(M-NV)H=H(M+NV)+T$ și egalitatea (3.5) este demonstrată. Din această egalitate, ținând cont de faptul că H este noetherian, rezultă că operatorii $M+NV$ și $M-NV$ sunt simultan noetherieni și indicii lor coincid. Atunci din egalitatea (3.4) obținem că $\mathrm{Ind}(M+NV)=\frac{1}{2}\mathrm{Ind}\,A_V$. Teorema este demonstrată.

Observație. *Teorema 3.5 rămâne adevărată și în cazul în care conturul de integrare Γ este orice curbă simplă închisă de tip Liapunov și funcția de translație α verifică condițiile lui Carleman.*

Demonstrația se face în mod similar. În acest caz, operatorul H se alege în felul următor:

$$H=(\alpha(t)-t)I+h(t)S,$$

unde funcția $h(t)$ verifică condiții asemănătoare celor din 1)-3) și condiției 4) $\alpha(t)-t\pm h(t)\neq 0$, care asigură rezolvabilitatea normală a operatorului H.

Concluzii

Metodele algebrelor Banach cu simbol au permis stabilirea criteriilor noetheriene pentru ecuațiile singulare cu translații în cazul conturului nemărginit. În procesul elaborării teoriei lui Noether pentru algebra $\mathcal{A}$ generată de operatorii singulari cu translații au fost evidențiate următoarele etape: a) construirea algebrei de simboluri $\mathcal{S}$; b) determinarea izomorfismului dintre algebra $\mathcal{S}$ și algebra cât $\mathcal{A}/\mathcal{T}$; c) studierea și stabilirea condițiilor de inversabilitate a simbolurilor; d) calcularea indicelui operatorilor noetherieni, care se exprimă prin simbolurile lor.

Metodele utilizate și rezultatele obținute în această lucrare pot fi folosite în studiul ulterior al operatorilor singulari în vederea lărgirii clasei de conturuti de integrare, a spațiilor de cercetare, precum și a coeficienților operatorilor.

Referinţe:

1. KRAVCHENKO, V., LITVINCHIUK, G. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Kluwer, 2012.
2. KRUPNIK, N., NEAGU, V. On singular operators with shift in the case of piecewise Lyapunov contour. In: *Soobsch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1974, no76, p.25-28 (Russian).
3. KRUPNIK, N., NEAGU, V. Singular integral operators with a shift along a piecewise Lyapunov contour. In: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1975, no6, p.60-72 (Russian).
4. NEAGU, V. Singular integral operators. The case of an unlimited contour. In: *Revue d′ analyse numérique et de théorie de l′ approximation* (Académie Roumaine), tome XXXIV, 2005, no2, p.151-168.
5. DUDUCHAVA, R. Convolution integral operators on a quadrant with discontinuous symbols. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR.* Ser. *Mat.,* 1976, no40:2, p.388-412 (Russian).
6. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. *One-dimensional linear singular integral equations*. Vol.I. Operator Theory. Basel-Boston –Stuttgart, 1992.
7. GOHBERG, I., KRUPNIK, N. On certain one-dimensional singular integral operators with a shift. In: *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1973, no1, p.3-12 (Russian).
8. KRUPNIK, N. *Banach algebras with symbol and singular integral operators*. Operator Theory: Advances and Applications (Birkhäuser), 26, 1987.
9. KARAPETYANTS, N., SAMKO, S. *Equations with Involutive Operators and Their Applications*. Operator Theory: Advances and Applications (Birkhäuser), 2005.
10. NYAGU, V. *The symbol of singular integral operators with conjugation the case of piecewise Lyapunov contour*. American Math. Society, 1983, vol.27, no1, p.173-176.
11. CASTROL, R. Explicit solutions of Cauchy singular integral equations with weighted Carleman shift. In: *J. Math. Anal. And Appl.,* 2010, vol.371, no1, p.128-133.

Prezentat la 13.02.2017