STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.30-36

CZU: 519.852

ASUPRA METODEI POTENȚIALELOR PENTRU PROBLEMA DE TRANSPORT DEGENERATĂ

Tatiana PAŞA, Valeriu UNGUREANU
Universitatea de Stat din Moldova

În lucrare este studiată problema de transport și sunt prezentate câteva observații ce țin de unele cazuri sau situații particulare ce pot apărea în procesul de soluționare a problemei de transport prin metoda potențialelor. Este expusă o modalitate de îmbunătățire a metodei pentru cazul problemei de transport degenerate.
Cuvinte-cheie: *problema de transport, soluție degenerată, soluție optimă.*

ON THE POTENTIAL METHOD FOR THE DEGENERATE TRANSPORTATION PROBLEM
We study the transportation problem and make some observations about cases or situations that can appear during the process of solution with the potential method. In addition, we expose an approach to improve the potential method to solve efficiently the degenerate transportation problems.
Keywords: *transportation problem, degenerate solution, optimal solution.*

Introducere

Denumirea „Problemă de Transport" este un nume generic dat unui tip special de probleme matematice și economice ce țin de optimizarea cheltuielilor de transport și alocare a resurselor. O problemă clasică de transport reprezintă o problemă particulară de programare liniară care constă în determinarea unui plan optim de transport a unui produs omogen de la *surse* (unități de aprovizionare, furnizori, centre de producție) la *destinații* (unități adresate, consumatori, beneficiari, centre de distribuție) cu scopul de a le satisface cererile minimizând concomitent cheltuielile totale de transport.

Pentru prima dată problema de transport a fost formulată și cercetată de către matematicianul francez Gaspard Monge în 1781 [1]. În anii 1920 problema a fost studiată din perspectiva matematică de către A.N. Tolstoi. Un progres considerabil în studierea și soluționarea problemei de transport a fost realizat de către matematicianul și economistul sovietic Leonid V. Kantorovich [2] în anii 1940. În consecință, problema de transport este numită *problema de transport Monge-Kantorovich*. Sub formă de problemă de programare liniară problema a fost considerată în anii 1940 și de către savanții americani, fiind cunoscută și sub denumirea de *problemă de transport Hitchcock-Koopmans*.

Metoda potențialelor este prima metodă exactă de soluționare a problemei de transport. A fost propusă în 1949 de către L.V. Kantorovici și M.C. Gavurin. Aceasta reprezintă o modificare a metodei simplex, ținând cont de specificul problemei de transport. Algoritmul metodei potențialelor diferă de un algoritm al metodei simplex prin lipsa pasului de control al funcției la nemărginire pe mulțimea de soluții. Lipsa acestui pas în metoda potențialelor este condiționată de faptul că orice problemă echilibrată de transport este întotdeauna soluționabilă.

În continuare ne vom referi doar la problema de transport ca problemă de programare liniară.

Problema de transport prezintă interes numai dacă respectă următoarele ipoteze:

- cel puțin o sursă poate aproviziona mai multe destinații și cel puțin o destinație poate primi unități de flux de la mai multe surse;
- unele rute de legătură pot avea restricții superioare și / sau inferioare asupra capacității de transportare;
- există un cost al deplasării unei unități de flux de la un punct la altul, care poate fi exprimat în unități monetare, timp sau distanță.

1. Formularea problemei clasice de transport

Se consideră că există un număr m de surse care posedă un produs dat în cantitatea a_i, $i = \overline{1,m}$ și n destinații care solicită acest produs și au necesitățile b_j, $j = \overline{1,n}$. Se presupune că o unitate de produs transportată de la sursa i la destinația j costă c_{ij} unități monetare, unde $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Se cere să se determine planul optim de transport, adică ce cantități x_{ij} de produs, unde $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, trebuie să fie transportate de la fiecare sursă la fiecare destinatar, astfel încât costul total de transport să fie minim.

Problema clasică de transport constă în determinarea unui plan x^*, astfel încât funcția obiectiv

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

să atingă valoarea minimă $F(x^*) = \min_{x\in X} F(x)$, unde X este mulțimea de soluții admisibile.

Modelul matematic al problemei de transport în forma standard este:

$$F(x) \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases} \quad (1)$$

Vom spune că problema de transport este echilibrată și admite soluții dacă satisface condițiile:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,\ a_i \geq 0,\ b_j \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \quad (2)$$

În cazul în care problema de transport nu este echilibrată, ea poate fi echilibrată în felul următor:

- pentru $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ se introduce o destinație fictivă pentru care

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

iar costurile de transport $c_{i,n+1}$, $i = \overline{1,m}$ sunt egale cu zero;

- pentru $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ se introduce o sursă fictivă pentru care

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

iar costurile de transport $c_{m+1,j}$, $j = \overline{1,n}$ sunt egale cu zero.

În cele mai dese cazuri, problemele economice concrete implică restricții, din motive tehnice sau economice, ale capacității de transportare pe unele rute. Modelul matematic al unei astfel de probleme poate fi descris astfel:

$$F(x) \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \\ 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, & i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

pentru care sunt satisfăcute relațiile ce asigură existența soluției:

- $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,\ a_i \geq 0,\ b_j \geq 0, r_{ij} \geq 0\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$
- $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \geq a_i$ pentru $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{n} r_{ij} \geq b_i$ pentru $i = \overline{1,m}$.

Dacă avem în vedere erorile de rotunjire ce apar inevitabil când se fac calcule pe calculator, orice eroare propagându-se imediat la tot tabelul, acest fapt este depășit aplicând varianta revizuită a algoritmului simplex. În prezent, există variate softuri performante pentru rezolvarea problemei de optimizare liniară, unul dintre ele fiind „Wolfram Mathematica".

2. Metoda potențialelor

Problema de transport poate fi soluționată utilizând metoda simplex [3]. Totuși, specificul problemei permite construirea unor metode mai eficiente. În primul rând, trebuie menționat faptul că matricea coeficienților din sistemul de restricții este dominată de zerouri. Este un argument destul de important, cel puțin în cazul dimensiunilor mari, de a folosi metoda potențialelor.

Vom remarca faptul că într-o problemă de transport nu poate apărea decât varianta de optim finit existând întotdeauna soluții admisibile, iar minimumul $-\infty$ nu este posibil, deoarece avem de minimizat o funcție liniară cu toți coeficienții pozitivi pe o mulțime de soluții cu toate componentele pozitive. În continuare enumerăm câteva rezultate importante bine cunoscute.

Teorema 1: *Problema de transport conține totdeauna o soluție și o restricție egalitate redundantă. Când este înlăturată oricare dintre restricțiile-egalități, sistemul format din cele* $n + m - 1$ *rămase formează un sistem liniar independent* [4].

Din Teorema 1 rezultă că o bază pentru problema de transport este formată din $m + n - 1$ vectori liniar independenți, iar soluția admisibilă de bază are $m + n - 1$ variabile. Dacă soluția admisibilă de bază are exact $m + n - 1$ componente pozitive, ea se numește *soluție admisibilă de bază nedegenerată*. Dacă soluția admisibilă de bază are mai puțin de $m + n - 1$ componente pozitive, ea se numește *soluție admisibilă de bază degenerată*.

STUDIA UNIVERSITATIS MOLDAVIAE, 2017, nr.2(102)
Seria "Științe exacte și economice" ISSN 1857-2073 ISSN online 2345-1033 p.30-36

Teorema 2: *O problemă de transport are soluții degenerate dacă și numai dacă există o submulțime strictă și nevidă a furnizorilor și o submulțime strictă și nevidă a consumatorilor, astfel încât suma disponibilităţilor furnizorilor din prima submulțime este egală cu suma cererilor consumatorilor din a doua.*

Metoda potențialelor este o versiune a algoritmului simplex revizuit și se numeşte algoritm de transport, expus inițial de către L.V. Kantorovich [5].

În continuare vom descrie pașii care trebuie îndepliniți pentru soluționarea unei probleme de transport conform metodei potențialelor.

Pasul 1: Se construiește tabelul de transport în care vom introduce datele ce se referă la cantitatea de produs pe care o conține fiecare sursă $a_i, i = \overline{1,m}$, cantitatea de produs de care are nevoie fiecare destinație $b_j, j = \overline{1,n}$ și cheltuielile de transport din sursa i în destinația j dată de valorile c_{ij}, ceea ce înseamnă că se completează *Tabelul 1:*

Tabelul 1

Tabelul de transport. Forma generală

B_j / A_i	B_1	B_2	…	B_n	a_i
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_n	

Pasul 2: Determinarea unei soluții inițiale de bază care poate fi obținută utilizând una dintre metodele ce urmează:

- *Metoda colțului nord – vest (G. Dantzig)* [6] constă în completarea consecutivă a celulelor tabelului cu cantități maximal posibile de produs după regula de sus în jos și de la stânga la dreapta, deci inițial se completează celula din stânga sus, apoi se completează una după alta tot rândul, se trece la următorul rând, care iarăși se completează de la stânga la dreaptă, și așa continuăm până se completează întregul tabel.
- *Metoda costului minim (H. S. Houthakker)* constă în completarea celulei care conține costul unitar de transport minimal, apoi se completează următoarea celulă cu cost unitar minimal, și așa mai departe până când se completează întregul tabel.

Fiind aleasă celula în care va fi înscrisă prima variabilă bazică, dar și fiecare alta mai târziu, conform uneia dintre metodele descrie mai sus, celulei i se va atribui valoarea posibilă în dependență de sumele de pe linii și, respectiv, coloane, adică $x_{pq} = \min(a_p, b_q)$, iar ca urmare putem avea una din situații [7]:

1) $a_k < b_l$, deci toate variabilele din linia k vor obține valoarea zero și se suprimă linia k din tabel, iar mărimea $b_l = b_l - a_k$; procesul se va repeta și pentru variabilele din tabelul nou obținut cu $m-1$ linii și n coloane;

2) $a_k > b_k$, deci toate variabilele din coloana l vor obține valoarea zero și se suprimă coloana l din tabel, iar mărimea $a_k = a_k - b_l$; procesul se va repeta și pentru variabilele din tabelul nou obținut cu m linii și $n-1$ coloane;

3) $a_k = b_l$, deci va fi ștearsă linia k sau coloana l, dar în niciun caz ambele: dacă în tabelul nou obținut vom avea câteva coloane și o singură linie, atunci se va suprima coloana l, iar în caz că se vor obține mai multe linii și o singură coloană, se va suprima linia k.

Teorema 3: *Variabilele obținute după metoda descrisă mai sus în calitate de soluție inițială formează baza.*

Pasul 3: Se verifică dacă soluția curentă este optimă. În acest scop inițial se formulează duala problemei de transport în felul următor: fiecărei restricții $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$ i se asociază o variabilă $u_i,\ i = \overline{1,m}$, iar fiecărei restricții $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$ i se asociază o variabilă $v_j,\ j = \overline{1,n}$, care sunt variabile în problema duală. Deoarece fiecare variabilă apare câte o singură dată în fiecare dintre restricții, duala poate fi scrisă astfel:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to max \\ u_i + v_j \le c_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \\ pentru \; \forall \, u_i, v_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Deoarece vom porni de la o soluție de bază nedegenerată, unde sunt $m + n - 1$ componente pozitive $x_{ij} > 0$, atunci soluția va fi optimă dacă $c_{ij} = u_i + v_j$.

Se va completa *Tabelul 2* care va conține:

a) Pe ultima linie valorile v_j, $j = \overline{1,n}$ și, respectiv, pe ultima coloană valorile u_i, $i = \overline{1,m}$ care vor fi determinate din relațiile: $u_i + v_j = c_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ - bazice.

Acest sistem admite o infinitate de soluții, deoarece avem $m + n - 1$ astfel de ecuații, dar numărul de necunoscute este $m + n$. Deci, pentru a obține valori unice se va considera $u_1 = 0$, iar restul necunoscutelor vor fi determinate din ecuații. Valorile u_i și v_j astfel obținute vor transforma în zerouri coeficienții variabilelor bazice.

b) Pentru fiecare celulă se calculează $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. În cazul elementelor din linia i și coloana j ce corespund componentelor nenule ale soluției admisibile de bază avem $\delta_{ij} = 0$.

Tabelul 2

Tabelul de transport ce conține o soluție inițială de bază

A_i \ B_j	B_1	B_2	…	B_n	u_i
A_1	c_{11} x_{11} δ_{11}	c_{12} x_{12} δ_{12}	…	c_{1n} x_{1n} δ_{1n}	u_1
A_2	c_{21} x_{21} δ_{21}	c_{22} x_{22} δ_{22}	…	c_{2n} x_{2n} δ_{2n}	u_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1} δ_{m1}	c_{m2} x_{m2} δ_{m2}	…	c_{mn} x_{mn} δ_{mn}	u_m
v_i	v_1	v_2	…	v_n	

În dependență de valorile δ_{ij} din *Tabelul 2* putem lua decizia în ceea ce privește optimalitatea soluției curente:

1. Dacă pentru orice $i = \overline{1,m}$ și orice $j = \overline{1,n}$ avem $\delta_{ij} \ge 0$, atunci soluția curentă este soluție optimă a problemei. **STOP**.
2. Dacă există $\delta_{ij} < 0$, atunci soluția curentă nu este optimă și se trece la **pasul 4**.

Teorema 4: *Problema de transport (1) are plan optim dacă și numai dacă este echilibrată.*

Pasul 4. Îmbunătățirea soluției curente constă în determinarea unei variabile dintre cele nebazice, care să intre în bază și să devină nenulă, și în determinarea unei variabile care va părăsi baza, ceea ce este posibil utilizând condiția de admisibilitate și, în consecință, soluția se va îmbunătăți. În așa fel, obținem altă soluție de bază, după care trecem la **pasul 3**.

Definiție: *Numim ciclu ce corespunde unei celule libere o succesiune de celule două câte două alăturate pe aceeași linie, sau respectiv pe aceeași coloană, cu treceri alternative pe linii și coloane, succesiunea care începe imediat după celula aleasă și se încheie în vecinătatea aceleiași celule.*

În scopul îmbunătățirii soluției se determină $\delta_{lk} = \min \delta_{ij}$ și, începând cu celula (l, k), se construiește un ciclu format din acele celule (i, j) ale tabelului cărora le corespund valorile $x_{ij} > 0$ trecând alternativ pe linii și coloane, încât să fie asigurată întoarcerea în celula (l, k) din care a pornit ciclul. Asociem celulelor din circuitul alternativ "+" și "-" alegându-se un sens de parcurgere oarecare, pornind pe linie sau coloană, începând cu celula (l, k). Pentru determinarea cantității de produs care trebuie transportat pentru îmbunătățirea soluției vom alege astfel de mărime care satisface condiția $x_{rs} = min\ \{x_{ij}|oricare\ i, j\ din\ ciclu\ cu\ semnul\ "-"\}$. După care modificăm varibelele ce aparțin ciclului după regula:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{rs}, & pentru\ celule\ cu\ semnul\ "-" \\ x_{ij} + x_{rs}, & pentru\ celule\ cu\ semnul\ "+" \end{cases}$$

După modificarea soluției se va trece la **pasul 3** pentru a verifica dacă soluția obținută este una optimă pentru problema formulată.

Din algoritmul descris putem face următoarele observații:

a) În cazul în care nu există rută între anumite surse și destinații problema poate fi soluționată utilizând aceeași metodă, asociind costuri de transport foarte mari în raport cu celelalte costuri și în așa fel, aplicând algoritmul, vor fi evitate rutele blocate.

b) Pentru determinarea unei soluții inițiale de bază, în cazul problemelor de transport cu restricții asupra capacității de transportare pe unele rute, se va ține cont de faptul că variabila x_{pq} este de bază doar dacă avem $x_{pq} = min\{a_p, b_q, r_{ij}\} = a_p$ sau $x_{pq} = min\{a_p, b_q, r_{ij}\} = b_q$. Chiar și în asemenea condiții este posibil ca disponibilul de produs să nu fie complet epuizat sau ca necesarul de produs să nu fie complet satisfăcut.

c) În cazul în care la pasul ce prevede verificarea soluției dacă este optimă avem câteva valori egale $\delta_{lk} = \min \delta_{ij}$, atunci alegem acea celulă căreia îi corespunde valoarea minimă a costului pentru unitate de produs.

d) În cazul în care pentru o soluție optimă avem $\delta_{ij} = 0$, unde i și j sunt indici în afara bazei, putem obține o soluție nouă pornind de la acea celulă și vom spune că problema are soluție optimă multiplă.

e) În cazul în care determinând cantitatea de produs care trebuie transportat pentru a îmbunătăți soluția alegem $x_{rs} = min\{x_{ij}|orice\ i, j\ din\ ciclu\ cu\ semnul\ "-"\}$, care este o valoare multiplă, implică ieșirea din soluție a tuturor, fapt ce conduce la obținerea unei soluții degenerate și care poate duce la ciclarea algoritmului. Ca opțiune în acest caz s-ar putea de înlocuit zerourile în exces cu 0^+, care vor impune participarea în soluție ca valori neegale cu zero.

f) În cazul în care avem o problemă de transport care necesită maximizarea funcției obiectiv, la fel poate fi aplicat algoritmul descris cu unele modificări: 1. Pentru a afla o soluție admisibilă inițială de bază se va utiliza metoda elementului maxim. 2. Se va verifica dacă soluția curentă este sau nu optimă; adică, dacă există $\delta_{ij} > 0$, ea nu este optimă și se va trece la pasul 4 al algoritmului.

g) Fiecare linie sau coloană a tabelului de transport conține două elemente din ciclu sau niciunul.

3. Tratarea soluției degenerate în soluționarea problemei clasice de transport

În cazul în care soluția admisibilă de bază are mai puțin de $m + n - 1$ componente pozitive și avem o soluție admisibilă de bază degenerată, putem obține o soluție nedegenerată înlocuind zerourile în exces cu 0^+, care vor impune participarea în soluție ca valori neegale cu zero.

O altă modalitate constă în alcătuirea sistemului $u_i + v_j = c_{ij},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$ - bazice. În cazul degenerat numărul de variabile cărora li se pot atribui valori arbitrare este mai mare decât unu. Soluționăm sistemul și calculăm diferențele finite $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$. Alegem celula cu cea mai mică valoare negativă. Pentru ea găsim un ciclu de redistribuire reieșind din considerentul că toate celulele marcate cu "-" trebuie neapărat să fie ocupate, adică valoarea înscrisă într-o celulă etichetată cu "-" trebuie să fie pozitivă. Existența cel puțin a unui ciclu este garantată de varianta obișnuită a metodei potențialelor. În urma redistribuirii valorilor se efectuează trecerea de la planul degenerat de transport la unul îmbunătățit, dar nu neapărat la unul nedegenerat. O asemenea metodă de îmbunătățire a planurilor de transport degenerate exclude cazurile când se efectuează trecerea de la un plan la altul cu schimbarea doar a valorilor 0^+ dintr-o celulă în alta. Prin urmare, cu evidență, o asemenea metodă de tratare a cazurilor degenerate poate micșora numărul de iterații ale metodei potențialelor la rezolvarea problemelor degenerate.

O modalitate de îmbunătățire a soluției sau/și de obținere a unei soluții nedegenerate este să respectăm următoarele recomandări:

1. Se construiește un ciclu, care va începe cu o celulă ce are valoarea fluxului egală cu zero, cea căreia îi corespunde un cost minim în cazul în care avem posibilitatea de a alege din câteva opțiuni și care va fi marcată cu "+";

2. Pentru ciclu se vor alege astfel de celule marcate cu "-" încât neapărat să conțină un flux de produs, iar celulele marcate cu "+" pot fi chiar și toate cu valori nule de flux;
3. Pentru determinarea cantității de produs care trebuie transportată astfel încât să îmbunătățim soluția vom alege $x_{rs} = min\{x_{ij}|oricare\ i, j\ din\ ciclu\ cu\ semnul\ "-"\}$. După care modificăm varibilele care aparțin ciclului după regula:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{rs}, & pentru\ celule\ cu\ semnul\ "-" \\ x_{ij} + x_{rs}, & pentru\ celule\ cu\ semnul\ "+" \end{cases}$$

4. Ne întoarcem la **pasul 3** al metodei potențialilor pentru a verifica dacă soluția obținută este optimă; în caz contrar, ne întoarcem la ***punctul 1*** și repetăm procedura de construire a ciclului și de îmbunătățire a soluției pentru o soluție degenerată.

Exemplu: Fie este dat *Tabelul 3* de transport cu soluția inițială degenerată.

Tabelul 3

Tabelul de transport ce conține o soluție degenerată

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	"-" 9 50	7	2	1 "+"	50
A_2	4 "+"	"-" 10 50	10	2	50
A_3	5	3 "+"	"-" 3 50	7	50
A_4	5	2	2 "+"	"-" 8 50	50
b_j	50	50	50	50	

Din Tabel se vede că am obținut o soluție $x_1 = (50, 50, 50,50,0,0,0)$ care conține doar 4 componente nenule, deci este o soluție degenerată. În acest caz, costul cheltuielilor este $F(x_1) = 1900$. Urmând recomandările de mai sus, vom construi un ciclu (A_1, B_1), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_3), (A_4, B_4), (A_1, B_4) și vom asocia începând cu (A_1, B_1) semnul "-", iar pentru (A_1, B_4) semnul "+". În urma transportării cantității de produs de mărimea 50 obținem Tabelul 4:

Tabelul 4

Tabelul de transport ce conține o soluție degenerată îmbunătățită

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	7	2	1 50	50
A_2	4 50	10	10	2	50
A_3	5	3 50	3	7	50
A_4	5	2	2 50	8	50
b_j	50	50	50	50	

Ca rezultat se va obține o soluție degenerată, dar căreia îi corespunde un cost mult mai mic $F(x_1) = 700$. Acest proces poate fi repetat, fapt ce ne va conduce la o soluție optimă.

Concluzii

În cazul respectării recomandărilor descrise mai sus, se va ajunge la aceeași soluție optimă care ar fi fost obținută utilizând 0^+ pentru a evita cazul soluției degenerate. Aceste reguli pot conduce la obținerea unei soluții optime în mai puține iterații în cazul unor probleme degenerate.

Referinţe:

1. MONGE, G. *Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais.* Histoire de l'Académie Royale de Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année 1781, De l'Imprimerie Royale, 1781.
2. KANTOROVICH, L. On the translocation of masses. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol.37 (7-8), 1942, p.227-229.
3. ГОЛЬШТЕЙН, Е.Г., ЮДИН, Д.Б. *Задачи линейного программирования транспортного типа*. Москва: Наука, 1969.
4. LUENBERGER, D.G., YE, Y. *Linear and nonlinear programming International Series in Operations Research and management science.* Springer, Stanford, 2008.
5. КАНТОРОВИЧ, Л.В., ГАВУРИН, М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузоперевозок. В: *Сборник статей «Проблемы повышения эффективности работы транспорта»*, АН СССР, 1949, с.110-138.
6. ДАНТЦИГ, Дж. *Линейное программирование: его обобщения и применения* / Перевод с англ. Г.Н. Андрианова, Л.И. Горькова, А.А. Корбута, А.Н. Ляпунова. Москва: Прогресс, 1966.
7. TRANDAFIR, R. *Modele și algoritmi de optimizare.* Seria *Matematică.* Modele și algoritmi de optimizare. București: AGIR, 2004.

Prezentat la 03.11.2016