UN ALGORITM DE REPARTIȚIE A INVESTIȚIILOR

Silivestru MAXIMILIAN, Raisa GLIGOR, Paulina LUCHIAN

Catedra Modelare Matematică şi Informatică Economică

A common problem for the modern economy is the investments distribution among various activities or branches of business. The dynamic programming is offering ways to find solutions.

The authors of this work are proposing a new method for solving these problems. This method is very easy to use and does not require deep knowledge of dynamic programming. The method can be used without any special PC tools.

În condițiile economiei de piață repartiția optimă a investițiilor între diferite activități poate fi intâlnită foarte frecvent. În particular, această problemă apare şi la repartiția investițiilor între ramurile economiei naționale. Evident, o astfel de repartiție se va efectua nu prin directive de la „centru”, ci cu ajutorul pârghiilor economice. Criteriile pot fi: realizarea venitului național maxim, beneficiul maxim, cheltuielile minime de producție, consumul neproductiv maxim, creşterea maximă a PIB etc. Se pune problema: dispunând de un anumit volum de investiții trebuie să se stabilească care politică de repartizare a investițiilor va da, de exemplu, maximum de beneficiu.

Rezolvarea acestei probleme intră în domeniul de aplicare a programării dinamice. O metodă de soluționare o putem găsi în [1]. Spre deosebire de această abordare, în materialul de mai jos se propune un alt limbaj de expunere, un alt algoritm. Rezultatele calculelor coincid. Fiecare din aceste algoritme, în diferite situatii economice, au efecte diferite.

Algoritmul din [1]. Pentru înțelegerea relațiilor funcționale care leagă variabilele în sistemul analizat, vom folosi urmatoarele notații: x_i, $i = 1,2,...,n$ reprezintă investițiile în unități indivizibile ce se vor face în fiecare ramură; $b_i(x_i)$ – beneficiile ce se realizează în fiecare ramură pentru un anumit nivel al investițiilor; $F(x_1,x_2,...,x_n)$ – funcția beneficiului total, adică:

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x_i)$$

Notăm cu I volumul de investiții; $y_i = y_{i-1}+x_{i+1}$, $i = 1,2,..., (n-1)$

Funcția beneficiului total:

$$F(x_1, y_1, y_2, ..., I) = b_1(x_1) + b_2(y_1 - x_1) + b_3(y_2 - y_1) + ...+ b_n(I - y_{n-2})$$

Maximul funcției F se obține printr-o optimizare secvențială care constă în căutarea unei subpolitici optime conținând un numar din ce in ce mai mare de faze alăturate, adică se va calcula succesiv:

$$f(y_1) = \max_{x_1=0;1;2;...y_1} (b_1(x_1) + b_2(y_1-y_0)) \quad (1)$$

$$f(y_2) = \max_{y_1=0;1;2;...y_2} (f(y_1) + b_3(y_2-y_1)) \quad (2)$$

$$f(y_3) = \max_{x_1=0;1;2;...y_3} (f(y_2) + b_4(y_3-y_2)) \quad (3)$$

....

$$f(I) = \max_{x_1=0;1;2;...y_1} (f(y_{n-1}) + b_n(I - y_{n-1}))$$

În momentul când I atinge valoarea dată, maximul funcției F va avea valoarea f(I).

Exemplu. Admitem că trebuie să se repartizeze între trei ramuri un volum de investiţii de 50 de milioane, adică 5 unităţi a câte 10 milioane fiecare, în funcţie de beneficiile care se pot obţine în fiecare ramură (Tab.1).

Tabelul 1

Investiţii	Beneficiul realizat în ramură		
0	0	0	0
1	0,3	0,25	0,25
2	0,5	0,45	0,3
3	0,7	0,6	0,45
4	0,8	0,65	0,5
5	0,9	0,8	0,65

În prima etapă se aplică relaţia (1), iar datele se trec în Tabelul 2.

Tabelul 2

Investiţii	$b_1(x_1)$	$b_2(x_2)$	$f(y_1)$	Soluţia optimă pentru ramurile 1 şi 2
0	0	0	0	(0,0)
1	0,3	0,25	0,3	(1,0)
2	0,5	0,45	0,55	(1,1)
3	0,7	0,6	0,75	(1,2) sau (2,1)
4	0,8	0,65	0,95	(2,2) sau (3,1)
5	0,9	0,8	1,15	(3,2)

Primele trei coloane sunt identice cu cele din Tabelul 1. Elementele coloanei a treia se calculează folosind relaţia (1), adică:

$f(y_1=1) = \max(b_1(0)+b_2(1);\ b_1(1)+b_2(0)) = \max(0+0{,}25;0{,}3+0) = 0{,}3;\ x_1 = 0;1$
$f(y_1=2) = \max(b_1(0)+b_2(2);\ b_1(1)+b_2(1);\ b_1(2)+b_2(0)) = \max(0+0{,}45;0{,}3+0{,}25;0{,}5+0) = 0{,}55;\quad x_1 = 0;1;2$
$f(y_1=3) = \max(b_1(0)+b_2(3);\ b_1(1)+b_2(2);b_1(2)+b_2(1);b_1(3)+b_2(0)) =$
$= \max\ (0+0{,}6;0{,}3+0{,}45;0{,}5+0{,}25;0{,}7+0) = 0{,}75;$
$x_1 = 0;1;2;3$ etc.

Rezultatele obţinute sunt înregistrate în coloana a treia a Tabelului 2 şi se interpretează. Astfel, dacă dispunem de 40 de milioane de lei pentru investiţii, beneficiul maxim se va obţine investind 20 de milioane în prima ramură şi 20 de milioane în a doua (sau 30 de milioane în prima şi 10 în a doua); dacă dispunem de 50 de milioane, beneficiul maxim se obţine investind 30 de milioane în prima ramură şi 20 de milioane în cea de-a doua. În continuare, se determină soluţia optimă pentru cele trei ramuri luate la un loc (Tab.3).

Tabelul 3

Investiţii	$f(y_1)$	$b_3(x_3)$	$f(y_2)$	Soluţia optimă pentru ramurile 1 şi 2	Soluţia optimă pentru ramurile 1 şi 2
0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	(0,0)	(0,0,0)
1	0,3	0,25	0,3	(1,0)	(1,0,0)
2	0,55	0,3	0,55	(1,1)	(1,0,1) sau (1,1,0)
3	0,75	0,45	0,8	(1,2) sau (2,1)	(1,1,1)
4	0,95	0,5	1	(2,2) sau (3,1)	(1,2,1) sau (2,1,1)
5	1,15	0,65	1,2	(3,2)	(2,2,1) sau (3,1,1)

Coloana a treia din Tabelul 3 se obține folosind relația (2):

$$f(y_2=1) = \max_{y_1=0;1}(f(y_1)+b_3(y_2-y_1)) = \max(f(0)+b3(1);f(1)+b3(0)) = \max(0+0{,}25;0{,}3+0) = 0{,}3$$

$$f(y_2=2) = \max_{y_1=0;1;2}(f(0)+b_3(2);f(1)+b_3(1);f(2)+b_3(0)) = \max(0+0{,}3;0{,}3+0{,}25;0{,}53+0) = 0{,}55 \text{ etc.}$$

În coloana a patra a Tabelului 3 se dau soluțiile optime pentru oricare din valorile lui I=0;1;2;3;4;5.

<u>Algoritmul autorilor.</u> În baza datelor inițiale din Tabelul 1 se creează Tabelul 4: matricea pătrată din tabel □ serveste ca bază; în stânga matricei, deasupra acesteia se înscriu respectiv beneficiile realizate în ramurile 1,2; suma acestor beneficii completează partea de sus a matricei față de diagonala secundă; determinăm valorile maxime din stânga-jos în dreapta-sus, după cum este indicat în Tabelul 4; valorile obținute le înregistrăm în ultima coloană a Tabelului 4.

Tabelul 4

				Investiții						Soluția optimă pentru ramurile 1 şi 2
				0	1	2	3	4	5	
					Beneficiul realizat în ramura 2					
				0	0,25	0,45	0,60	0,65	0,80	
Investiții	0	Soluția optimă pentru ramura 1	0	0+0=0	0+0,25= =0,25	0+0,45= 0,45	0+0,60= =0,60	0+0,65= =0,65	0+0,80= =0,80	0_{00}
	1		0,3	0,3+0= =0,3	0,3+0,25= =0,55	0,3+0,45= =0,75	0,3+0,60= =0,90	0,3+0,65 =0,95		$0{,}3_{10}$
	2		0,5	0,5+0= =0,5	0,5+0,25= =0,75	0,5+0,45= =0,95	0,5+0,6= =1,1			$0{,}55_{11}$
	3		0,7	0,7+0= =0,7	0,7+0,25= =0,95	0,7+0,45= =1,15				$0{,}75_{21;12}$
	4		0,8	0,8+0= =0,8	0,8+0,25= =1,05					$0{,}95_{31;22}$
	5		0,9	0,9+0= =0,9						$1{,}15_{32}$

Soluția optimă pentru ramurile 1 şi 2 o transcriem din dreapta matricei de bază din Tabelul 5; deasupra matricei inregistrăm beneficiile ramurii a treia. Tabelul 5 îl procesăm similar Tabelului 4. Soluția optimă pentru ramurile 1,2,3 este inregistrată în ultima coloană a Tabelului 5 (coincide cu soluția calculată după algoritmul din [1]).

Tabelul 5

				Investiții						Soluția optimă pentru ramurile 1, 2 şi 3
				0	1	2	3	4	5	
					Beneficiul realizat în ramura 3					
				0	0,25	0,3	0,45	0,5	0,65	
Investiții	0	Soluția optimă pentru ramurile 1 şi 2	0_{00}	0+0=0	0+0,25= =0,25	0+0,3= 0,3	0+0,45= =0,45	0+0,5= =0,5	0+0,65= =0,65	
	1		$0{,}3_{10}$	0,3+0= =0,3	0,3+0,25= =0,55	0,3+0,3= =0,6	0,3+0,45= =0,75	0,3+0,5= =0,8		
	2		$0{,}55_{11}$	0,55+0= =0,55	0,55+0,25= =0,8	0,55+0,3= =0,85	0,55+0,45=1			
	3		$0{,}75_{21;12}$	0,75+0= =0,75	0,75+0,25= =1	0,75+0,3= =1,05				
	4		$0{,}95_{31;22}$	0,95+0= =0,95	0,95+0,25= =1,2					
	5		$1{,}15_{32}$	1,15+0= =1,15						

Cazul general: De repartizat între R ramuri un volum de investiții de I unități monetare, adică M unitați a câte I unități monetare fiecare, $M \cdot I_1 = I$, în funcție de beneficiile care se pot obține în fiecare ramură (Tab.6).

Tabelul 6

Investiții a câte I_1 unități	Beneficiul realizat în ramură					
	1	2	...	r	...	R
1	b_{11}	b_{12}	...	b_{1r}	...	b_{1R}
2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2r}	...	b_{2R}
...	...	...	...	...	...	...
m	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mr}	...	b_{m1}
...	...	...	...	...	...	...
M	b_{M1}	b_{M1}	...	b_{Mr}	...	b_{M1}

Soluționăm problema pentru primele două ramuri. În acest scop elaborăm Tabelul 7: matricea de bază, pătrată de dimensiunile (M+1)x(M+1); în stânga matricei de bază înregistrăm investițiile şi beneficiul obținut datorită acestora în ramura 1; supra matricei de bază – investițiile şi beneficiul respectiv în ramura 2; supra diagonalei secunde a matricei de bază sunt inscrise sumele beneficiilor de pe linie şi de pe coloană; sumele sunt notate cu S dotate cu doi indici care semnifică numărul liniei, coloanei. Valorile maxime ale acestor sume constituie componentele soluției optime pentru repartiția investițiilor în ramurile 1 şi 2.

Tabelul 7

		0	b_{12}	b_{22}	b_{32}	b_{42}	...	b_{m2}	...	b_{M2}	Soluția optimă pentru ramurile 1 şi 2
		0	1	2	3	4	...	m	...	M	
0	0	0+0	$0+b_{12}$	$0+b_{22}$	$0+b_{32}$	$0+b_{42}$	...	$0+b_{m2}$	...	$0+b_{M2}$	max $S_{00}= S^*{i_0 j_0}$ iar $j_0=0$
b_{11}	1	$b_{11}+0$	$b_{11}+b_{12}$	$b_{11}+b_{22}$	$b_{11}+b_{32}$	$b_{11}+b_{32}$	...	$b_{11}+b_{32}$	...		$\max(S_{10},S_{01})=S^*{i_1 j_1}$ $i_1+j_1=1$
b_{21}	2	$b_{21}+0$	$b_{21}+b_{12}$	$b_{21}+b_{22}$	$b_{21}+b_{32}$	$b_{21}+b_{32}$	...	$b_{21}+b_{32}$			$\max(S_{20},S_{11}, S_{02})=S^*{i_2 j_2}$ $i_2+j_2=2$
b_{31}	3	$b_{31}+0$	$b_{31}+b_{12}$	$b_{31}+b_{22}$	$b_{31}+b_{32}$	$b_{31}+b_{32}$	...				$\max(S_{30},S_{21},S_{12}, S_{03})=S^*{i_3 j_3}$ $i_3+j_3=3$
b_{41}	4	$b_{41}+0$	$b_{41}+b_{12}$	$b_{41}+b_{22}$	$b_{41}+b_{32}$	$b_{41}+b_{42}$					$\max(S_{40}, S_{31}, S_{22}, S_{13}, S_{04})=S^*{i_4 j_4}$ $i_4+j_4=2$
...	...	...	...	...	...						
b_{m1}	m	$b_{m1}+0$	$b_{m1}+b_{12}$	$b_{m1}+b_{22}$							$\max(S_{m0},S_{m-1,1},..., S_{0m})=S^*{i_m j_m}$ $i_m+j_m=2$
...	...	...	...								
b_{M1}	M	$b_{M1}+0$									$\max(S_{20},S_{11}, S_{02})=S^*{i_2 j_2}$ $i_M+j_M=M$

În continuare, elaborăm Tabelul 8: aceleaşi dimensiuni; în stânga matricei de bază înregistrăm soluția optimă obținută în tabelul precedent; supra matricei de bază – beneficiile respective în ramura 3; procesarea datelor se efectuează similar Tabelului 7; în ultima coloană a Tabelului 8 este înregistrată soluția optimă pentru ramurile 1,2,3.

Tabelul 8

		0	b_{13}	b_{23}	b_{33}	b_{43}	...	b_{m3}	...	b_{M3}	Soluția optimă pentru ramurile 1,2,3
		0	1	2	3	4	...	m	...	M	
$S^*i_0j_0$	0	$S^*i_0j_0+0$	$S^*i_0j_0+b_{13}$	$S^*i_0j_0+b_{23}$	$S^*i_0j_0+b_{33}$	$S^*i_0j_0+b_{43}$	...	$S^*i_0j_0+b_{m3}$	...	$S^*i_0j_0+b_{M3}$	max $S_{000}= S^*i_0j_0k_0$ iar $i_0+j_0+k_0=0$
$S^*i_1j_1$	1	$S^*i_1j_1+0$	$S^*i_1j_1+b_{13}$	$S^*i_1j_1+b_{23}$	$S^*i_1j_1+b_{33}$	$S^*i_1j_1+b_{33}$	...	$S^*i_1j_1+b_{33}$	...		$\max(S^*i_1j_1, S^*i_0j_0+b_{13})=S^*i_1j_1k_1$
$S^*i_2j_2$	2	$S^*i_2j_2+0$	$S^*i_2j_2+b_{13}$	$S^*i_2j_2+b_{23}$	$S^*i_2j_2+b_{33}$	$S^*i_2j_2+b_{33}$	...	$S^*i_2j_2+b_{33}$			$\max(S^*i_2j_2, S^*i_1j_1+b_{13}, S^*i_0j_0+b_{23})=S^*i_2j_2k_2$
$S^*i_3j_3$	3	$S^*i_3j_3+0$	$S^*i_3j_3+b_{13}$	$S^*i_3j_3+b_{23}$	$S^*i_3j_3+b_{33}$	$S^*i_3j_3+b_{33}$	...				$\max(S^*i_3, S^*i_2j_2+b_{13}, S^*i_1j_1+b_{23}, S^*i_0j_0+b_{33})=S^*i_3j_3k_3$
$S^*i_4j_4$	4	$S^*i_4j_4+0$	$S^*i_4j_4+b_{13}$	$S^*i_4j_4+b_{23}$	$S^*i_4j_4+b_{33}$	$S^*i_4j_4+b_{43}$					$\max(S^*i_4j_4, S^*i_3j_3+b_{13}, S^*i_2j_2+b_{23}, S^*i_1j_1+b_{33}, S^*i_0j_0 + b_{43})=S^*i_4j_4k_4$
...	...	..	...	...	...						...
$S^*i_mj_m$	m	$S^*i_mj_m+0$	$S^*i_mj_m+b_{13}$	$S^*i_mj_m+b_{23}$							$S^*i_mj_mk_m$
...	...	...	...								...
$S^*i_Mj_M$	M	$S^*i_Mj_M$									$S^*i_Mj_Mk_M$

Simplitatea calculelor permite determinarea soluției optime pentru cele mai diverse probleme economice.

Algoritmul prezentat poate fi dezvoltat, introducând în calcul timpul „de coacere” a investițiilor (lag-ul), discontarea finanțelor investite în perioade diferite pentru a le transforma în mărimi comensurabile.

Referințe:

1. Tövissi L, Tigănescu E. Balanța legăturilor dintre ramuri. - București: Editura Științifică, 1969, p.280-283.

Prezentat la 07.02.2007