STRUCTURA AUTOMORFISMELOR GRUPURILOR CRISTALOGRAFICE DE CATEGORIA G_{30}

Alexandru LUNGU, Marina BRANIŞTE

Catedra Algebră şi Geometrie

In the present paper there are studied and described the concrete structure of the automorphisms of 3-dimensional crystallographic point groups.

1. Simetria, indiferent cum veţi defini această noţiune – în sens larg sau îngust, este acea idee prin intermediul căreia omul pe parcursul secolelor a încercat să atingă şi să creeze regularitatea, frumuseţea şi perfecţiunea [1]. Se spune că simetria unei figuri geometrice este proprietatea ei de a include în sine părţi egale aranjate uniform, iar legităţile de aranjare a acestor părţi sunt descrise de transformările de simetrie.

Încă din antichitate legităţile simetriei sunt studiate şi aplicate în diferite domenii ale activităţii umane, dar abia la sfârşitul secolului XIX teoria simetriei clasice a atins culmi mărețe în lucrările renumiţilor savanţi E.S. Fiodorov [2,3] şi A.Schonflies [4]. Grupurile de simetrie clasică şi grupurile discrete de simetrii generalizate au pătruns adânc în diferite ramuri ale ştiinţelor naturale, ale tehnicii şi artei [5-10].

Printre multitudinea de generalizări ale simetriei le vom numi pe cele mai recente la elaborarea teoriei generale a cărora au contribuit substanţial geometrii chişinăueni: antisimetria simplă şi cea l-multiplă [11], $P-$ simetria [12-14], $\overline{P}-$simetria [15-17], W_p $-$simetria [18-22] şi W_q $-$simetria [23-27]. Vom menţiona că în teoria generalizărilor „fizice” recente ale simetriei clasice un rol foarte însemnat îl joacă automorfismele grupurilor de substituţii ca grupuri iniţiale de definire.

Găsirea tuturor automorfismelor grupului dat de substituţii P prezintă uneori mari greutăţi şi nu există metode generale pentru aceasta. Mai mult, în majoritatea cazurilor, proprietăţile grupurilor nu se transmit grupurilor lor de automorfisme. De exemplu, grupul tuturor automorfismelor unui grup abelian poate fi neabelian şi, invers, grupul neabelian P poate avea grupul tuturor automorfismelor abelian. Se poate totuşi afirma că grupul tuturor automorfismelor unui grup finit va fi un grup finit.

În prezenta lucrare vom analiza structura concretă a automorfismelor grupurilor de simetrie de categoria G_{30}, deoarece din considerente de aplicaţii prezintă interes mai ales $\overline{P}-$simetriile cristalografice (când grupul lor de definire P este izomorf cu un grup punctual cristalografic tridimensional).

2. Vom comenta mai întâi unele aspecte bine cunoscute despre automorfismele grupului [28-29]. Se ştie că orice aplicaţie izomorfă a grupului P pe sine este un automorfism al acestui grup. Aplicaţia identică a grupului P pe sine ne dă aşa-numitul automorfism identic.

Dacă în grupul P vom fixa un element oarecare a, atunci transformarea φ_a ce aplică orice element x din grupul P pe elementul $a^{-1}xa$ va fi un automorfism. Un aşa automorfism al grupului P se numeşte *automorfism intern*. Toate automorfismele grupului P care nu sunt interne se numesc *externe*. Automorfismul identic este intern, deoarece el se obţine în rezultatul conjugării elementelor grupului cu elementul-unitate. Pentru grupurile abeliene automorfismul identic este unicul automorfism intern.

În caz general, automorfismul φ_a, generat de elementul a, coincide cu automorfismul identic atunci şi numai atunci când a aparţine centrului grupului. Este evident că fiecare automorfism intern aplică pe sine orice clasă de elemente conjugate ale grupului respectiv.

Mulţimea tuturor automorfismelor grupului P formează un grup multiplicativ $AutP$, care este un subgrup în grupul tuturor aplicaţiilor biunivoce ale lui P pe sine: $AutP < S(P)$. Mulţimea tuturor automorfismelor interne ale grupului P la fel formează un grup $IntP$, deoarece transformarea consecutivă a grupului P cu elementele a şi b este echivalentă cu transformarea lui cu ajutorul elementului ab. Grupul $IntP$ este un subgrup în grupul $AutP$; mai mult, el este şi divizor normal. Într-adevăr, fie date automorfismul $\alpha^{-1} \in AutP$

şi automorfismul intern φ_a, generat de elementul a. Atunci, pentru orice element x din grupul P vom avea $\alpha\varphi_a\alpha^{-1}(x) = \alpha\{\varphi_a[\alpha^{-1}(x)]\} = \alpha\{a^{-1}[\alpha^{-1}(x)]a\} = \alpha(a^{-1})\cdot\alpha\alpha^{-1}(x)\cdot\alpha(a) = [\alpha(a)]^{-1}x[\alpha(a)]$. Prin urmare, automorfismul $\alpha\varphi_a\alpha^{-1} = (\alpha^{-1})^{-1}\varphi_a\alpha^{-1}$ el însuşi este un automorfism intern şi este generat de elementul $\alpha(a)$.

Dacă oricărui element a al grupului P îi vom pune în corespondență automorfismul intern φ_a, generat de către acest element, atunci vom obține omomorfismul φ al grupului P pe grupul $IntP$. Nucleul acestui omomorfism coincide cu centrul $C(P)$ al grupului P, deoarece egalitățile $a^{-1}xa = x$ pentru orice $x \in P$ sunt echivalente comutativității elementului a cu toate elementele grupului. Drept consecință, grupul $IntP$ este izomorf cu grupul-factor $P/C(P)$. Mai mult, elementele a şi b ale grupului P generează unul şi acelaşi automorfism intern atunci şi numai atunci când ele aparțin aceleiaşi clase de resturi ale grupului P față de centrul său.

Dacă grupul finit generat P este dat de către un sistem ireductibil de elemente generatoare $M = \{p_1, p_2, ...p_k\}$, atunci orice automorfism α al acestui grup se determină prin găsirea imaginilor posibile $\alpha(p_i)$ ale tuturor elementelor generatoare p_i. Mai mult, mulțimea imaginilor $\alpha(p_i)$ ale tuturor elementelor p_i din M la automorfismul α de asemenea va forma un sistem ireductibil de elemente generatoare pentru grupul P.

3. Fie G un grup punctual cristalografic tridimensional concret dat prin simbolul compact al lui Schonflies sau în simbolica Şubnikov, prin intermediul unui sistem ireductibil de elemente generatoare [30]. Atunci, sistemul ireductibil de elemente generatoare al grupului G este format cel mult din trei elemente independente. La aplicația izomorfă φ a grupului G pe sine elementul generator g de ordinul k poate fi aplicat numai pe un element $\varphi(g)$ la fel de ordinul k. Prin urmare, dacă ordinul grupului G este n, atunci ordinul m al grupului $AutG$ este un divizor al lui $n!$, chiar al lui $(n-1)!$, deoarece unitatea grupului se va aplica pe sine la orice automorfism.

Automorfismele grupului G se construiesc nemijlocit, găsind întâi toate elementele lui G ce pot servi ca imagini pentru fiecare din elementele generatoare. Acțiunea concretă a fiecărui automorfism asupra elementelor g_i din grupul G o prezentăm în formă de substituție a acestor elemente descompusă în produs de cicluri. Grupurile $AutG$ le prezentăm cu ajutorul elementelor generatoare. Grupurile de simetrie G de categoria G_{30} şi grupurile $AutG$ le prezentăm în tabele folosind simbolica lui Schonflies. În simbolurile grupurilor $AutG$ concrete adăugăm sus un indice a. Automorfismul concret de ordinul k îl notăm cu simbolul k^α.

Este evident că: 1) grupurile izomorfe G şi G' vor avea acelaşi grup al tuturor automorfismelor $AutG = AutG'$; 2) orice grup ciclic G posedă numai două automorfisme, anume: cel identic 1^α şi automorfismul exterior ce aplică fiecare element din G pe inversul lui. Deci, grupul tuturor automorfismelor unui grup ciclic G este de ordinul al doilea: $AutG = C_2^\alpha$, unde $C_2^\alpha = \{1^\alpha, 2^\alpha\}$.

Menționăm că, dacă grupul G este perfect (fără centru şi orice automorfism al lui este intern), atunci grupul $AutG$ este izomorf cu însuşi grupul G. Deoarece grupurile de substituții simetrice de gradul trei S_3 şi, respectiv, de gradul patru S_4 sunt perfecte [28,29], vom obține că $AutS_3 \cong S_3$ şi, respectiv, $AutS_4 \cong S_4$.

Exemplul 1. Fie $G = D_2 = \{1, 2_x, 2_y, 2_z\}$. Grupul este generat de două elemente de ordinul II, de exemplu, 2_x şi 2_y. În grupul D_2 sunt trei elemente de ordinul II. De aceea, primul element generator 2_x poate fi aplicat pe orice element de acelaşi ordin, pe când al doilea 2_y – de acum numai pe 2_y şi pe 2_y. Prin urmare, pentru elementul 2_x se obțin trei posibilități care şi generează automorfismul $\alpha : 2_x \to 2_y \to 2_z \to 2_x$. Deoarece $\alpha^2 : 2_x \to 2_z \to 2_y \to 2_x$, iar $\alpha^3 : 2_x \to 2_x$, $2_y \to 2_y$, $2_z \to 2_z$, apoi α este o transformare ciclică de ordinul al treilea şi mai departe vom nota-o cu simbolul 3^α. Deci, am obținut $\alpha = 3^\alpha$, $\alpha^2 = (3^\alpha)^2 = (3^\alpha)^{-1} = 3^{-\alpha}$, $\alpha^3 = 1^\alpha$. Automorfismul 3^α poate fi descris cu ajutorul ciclului $(2_x, 2_y, 2_z)$. În mod analog, pentru al doilea element generator 2_y al grupului D_2 vom obține un automorfism de ordinul II $2^\alpha : (2_y, 2_z)$. Automorfismele 3^α şi 2^α servesc ca elemente generatoare ale grupului $AutD_2$, deoarece $3^\alpha \cdot 2^\alpha : (2_x, 2_y, 2_z) \cdot (2_y, 2_z) = (2_x, 2_y)$, iar $3^{-\alpha} \cdot 2^\alpha$: $(2_x, 2_z, 2_y) \cdot (2_y, 2_z) = (2_x, 2_z)$. Drept consecință, $AutD_2 = D_3^\alpha = \{3^\alpha, 2^\alpha\}$, deoarece relațiile generatoare ale grupului sunt $(3^\alpha)^3 = (2^\alpha)^2 = (3^\alpha \cdot 2^\alpha)^2 = (3^{-\alpha} \cdot 2^\alpha)^2 = 1^\alpha$.

Exemplul 2. Fie $G = C_{3v} = \{1, 3, 3^{-1}, m_1, m_2, m_3\}$ – grupul complet de simetrie al triunghiului regulat. Grupul este generat de un element de ordinul III (rotație în jurul centrului triunghiului) şi un element de ordinul II (reflexie față de una din înălțimile triunghiului), de exemplu, 3 şi m_1.

Pentru m_1 este posibilă aplicația $m_1 \to m_3 \to m_2 \to m_1$, care implică aplicațiile $3 \to 3$ şi $3^{-1} \to 3^{-1}$. Deci, se obține automorfismul $3^\alpha : (m_1, m_3, m_2)$. Dacă $3 \to 3^{-1} \to 3$ iar $m_1 \to m_1$, atunci $m_2 \to m_3 \to m_2$. Deci, se obține automorfismul $2_1^\alpha : (3, 3^{-1})(m_2, m_3)$. Drept consecință, se mai obțin încă trei automorfisme neidentice.

Tabelul 1

Tabelul Cayley al grupului C_{3v}

1	3^{-1}	3	m_1	m_2	m_3
3	1	3^{-1}	$3 \cdot m_1 = m_3$	$3 \cdot m_2 = m_1$	$3 \cdot m_3 = m_2$
3^{-1}	3	1	m_2	m_3	m_1
m_1	m_3	m_2	1	3	3^{-1}
m_2	m_1	m_3	3^{-1}	1	3
m_3	m_2	m_1	3	3^{-1}	1

Anume, $3^{-\alpha}$: (m_1, m_2, m_3); $3^\alpha \cdot 2_1^\alpha = 2_2^\alpha$: $(3, 3^{-1})(m_1, m_3)$; $3^{-\alpha} \cdot 2_1^\alpha = 3^\alpha \cdot 2_2^\alpha = 2_3^\alpha$: $(3, 3^{-1})(m_1, m_2)$. În final se obține grupul tuturor automorfismelor lui C_{3v}: $AutC_{3v} = D_3^\alpha = \{3^\alpha, 2_1^\alpha\} = \{3^\alpha, 2_2^\alpha\} = \{3^\alpha, 2_3^\alpha\} = \{3^{-\alpha}, 2_1^\alpha\} = \{3^{-\alpha}, 2_2^\alpha\} = \{3^{-\alpha}, 2_3^\alpha\}$.

Exemplul 3. Un interes aparte prezintă grupul abelian $D_{2h} = V_h = \{1, 2_1, 2_2, 2_3, \tilde{2}, m_1, m_2, m_3\}$, care este grupul complet de simetrie al paralelepipedului dreptunghiular. Menționăm că axa de rotație de ordinul II 2_i este perpendiculară planului de reflexie m_i pentru fiecare $i = 1, 2, 3$. Printre elementele grupului cercetat numai m_1, m_2, m_3 şi $\tilde{2}$ sunt elemente independente, deoarece produsul oricăror două din ele este un element al grupului diferit de aceste patru, iar în totalitate cele patru elemente şi elementele obținute în formă de produs formează grupul considerat. Drept urmare, totalitatea automorfismelor grupului D_{2h} ce aplică ansamblul de elemente m_1, m_2, m_3 şi $\tilde{2}$ pe sine va forma un grup izomorf cu grupul simetric de ordinul IV.

Deoarece toate elementele neidentice ale grupului D_{2h} sunt de acelaşi ordin, numaidecât există automorfisme de ordinul VII, de exemplu, 7_1^α : $(m_1, m_2, m_3, 2_3, 2_1, \tilde{2}, 2_2)$. Nemijlocit se obține că grupul tuturor automorfismelor $AutD_{2h}$, fiind un produs al subgrupurilor sale Td^α şi C_7^α; are 168 de elemente, dintre care 42 elemente sunt de ordinul VII, 18 de ordinul VI, 36 de ordinul IV, 50 de ordinul III, 21 de ordinul II şi, bineînțeles, numai unul de ordinul I.

4. În Tabelul 2 vom prezenta rezultatele concrete obținute pentru grupurile punctuale cristalografice tridimensionale, menționând că tabelele Cayley ale celor 32 grupuri de simetrie de categoria G_{30} pot fi restabilite folosind informația din [31].

Tabelul 2

Grupurile $AutG$, unde G este grup de simetrie de categoria G_{30}

Nr. d/o	Simbolurile grupurilor		Elemente generatoare independente pentru grupul $AutG$
	G	$AutG$	
1	C_1	C_1^α	1^α
2	$C_2 = D_1$	C_1^α	1^α
3	$C_s = C_{1h} = C_{1v}$	C_1^α	1^α
4	$C_i = S_2$	C_1^α	1^α
5	C_3	C_2^α	$2^\alpha : (3, 3^{-1})$
6	C_4	C_2^α	$2^\alpha : (4, 4^{-1})$
7	S_4	C_2^α	$2^\alpha : (\tilde{4}, \tilde{4}^{-1})$
8	C_6	C_2^α	$2^\alpha : (3, 3^{-1})(6, 6^{-1})$
9	$S_6 = C_{3i}$	C_2^α	$2^\alpha : (3, 3^{-1})(\tilde{6}, \tilde{6}^{-1})$
10	C_{3h}	C_2^α	$2^\alpha : (3, 3^{-1})(\overline{3}, \overline{3}^{-1})$
11	$D_2 = V$	D_3^α	$3^\alpha : (2_1, 2_2, 2_3)$; $2_1^\alpha : (2_2, 2_3)$.
12	C_{2v}	D_3^α	$3^\alpha : (2, m_1, m_2)$; $2_1^\alpha : (m_1, m_2)$.
13	C_{2h}	D_3^α	$3^\alpha : (2, \tilde{2}, m)$; $2_1^\alpha : (2, m)$.
14	D_3	D_3^α	$3^\alpha : (2_1, 2_3, 2_2)$; $2_1^\alpha : (3, 3^{-1})(2_2, 2_3)$.
15	C_{3v}	D_3^α	$3^\alpha : (m_1, m_3, m_2)$; $2_1^\alpha : (3, 3^{-1})(m_2, m_3)$.

16	D_4	D_4^α	$4^\alpha:(2_1,2_2,2_3,2_4)$; $2_1^\alpha:(4,4^{-1})(2_2,2_4)$.
17	C_{4v}	D_4^α	$4^\alpha:(m_1,m_2,m_3,m_4)$; $2_1^\alpha:(4,4^{-1})(m_2,m_4)$.
18	$D_{2d}=V_d$	D_4^α	$4^\alpha:(2_1,m_1,2_2,m_2)$; $2_1^\alpha:(\tilde{4},\tilde{4}^{-1})(2_1,m_1)(2_2,m_2)$.
19	C_{4h}	D_4^α	$4^\alpha:(4,\tilde{4},4^{-1},\tilde{4}^{-1})(\tilde{2},m)$; $2_1^\alpha:(4,\tilde{4})(4^{-1},\tilde{4}^{-1})$.
20	$D_{2h}=V_h$	$Td^\alpha\cdot C_7^\alpha$	$3_1^\alpha:(2_1,2_2,2_3)(m_1,m_2,m_3)$; $4_1^\alpha:(2_2,2_3)(m_1,m_2,m_3,\tilde{2})$; $7^\alpha:(m_1,m_2,m_3,2_2,2_3,\tilde{2},2_1)$.
21	C_{6h}	D_6^α	$6^\alpha:(6,\overline{3},\tilde{6},6^{-1},\overline{3}^{-1},\tilde{6}^{-1})(3,3^{-1})(\tilde{2},2,m)$; $2_1^\alpha:(6,\overline{3})(6^{-1},\overline{3}^{-1})(\tilde{6},\tilde{6}^{-1})(2,m)(3,3^{-1})$.
22	D_6	D_6^α	$6^\alpha:(2_1,2_2,2_3,2_4,2_5,2_6)$; $2_1^\alpha:(2_1,2_2)(2_3,2_6)(2_4,2_5)(6,6^{-1})(3,3^{-1})$.
23	C_{6v}	D_6^α	$6^\alpha:(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5,m_6)$; $2_1^\alpha:(m_1,m_2)(m_3,m_6)(m_4,m_5)(6,6^{-1})(3,3^{-1})$.
24	D_{3d}	D_6^α	$6^\alpha:(2_1,m_2,2_3,m_4,2_5,m_6)$; $2_1^\alpha:(2_1,m_2)(2_3,m_6)(2_5,m_4)(\tilde{6},\tilde{6}^{-1})(3,3^{-1})$.
25	D_{3h}	D_6^α	$6^\alpha:(2_1,m_2,2_3,m_1,2_2,m_3)$; $2_1^\alpha:(2_1,m_2)(2_3,m_3)(2_2,m_1)(\overline{3},\overline{3}^{-1})(3,3^{-1})$.
26	T	Td^α	$4_1^\alpha:(2_2,2_3)(3_1,3_3^{-1},3_2^{-1},3_4)(3_1^{-1},3_3,3_2,3_4^{-1})$; $3_2^\alpha:(2_1,2_2,2_3)(3_1,3_3,3_4^{-1})(3_1^{-1},3_3^{-1},3_4)$.
27	D_{4h}	D_{4h}^α	$4^\alpha:(2_1,2_2,2_3,2_4)(m_1,m_2,m_3,m_4)$; $2^\alpha:(2_1,m_1)(2_2,m_2)(2_3,m_3)(2_4,m_4)$; $2_1^\alpha:(2_2,2_4)(m_2,m_4)(4,4^{-1})(\tilde{4},\tilde{4}^{-1})$.
28	Td	Td^α	$4_3^\alpha:(3_1,3_2,3_3,3_4)(3_1^{-1},3_2^{-1},3_3^{-1},3_4^{-1})(\tilde{4}_1^2,\tilde{4}_2^2)\times$ $(\tilde{4}_1,\tilde{4}_2,\tilde{4}_1^{-1},\tilde{4}_2^{-1})(m_4,m_7,m_5,m_6)(m_8,m_9)$; $3_2^\alpha:(\tilde{4}_1^2,\tilde{4}_2^2,\tilde{4}_3^2)(\tilde{4}_1,\tilde{4}_2,\tilde{4}_3)(\tilde{4}_1^{-1},\tilde{4}_2^{-1},\tilde{4}_3^{-1})\times$ $(3_2,3_4,3_3^{-1})(3_2^{-1},3_4^{-1},3_3)(m_4,m_6,m_9)\times(m_5,m_7,m_8)$

29	O	Td^{α}	$4_3^{\alpha}:(3_1,3_2,3_3,3_4)(3_1^{-1},3_2^{-1},3_3^{-1},3_4^{-1})(4_1^2,4_2^2)\times$ $(4_1,4_2,4_1^{-1},4_2^{-1})(2_1,2_4,2_2,2_3)(2_5,2_6)$; $3_1^{\alpha}:(4_1^2,4_2^2,4_3^2)(4_1,4_2,4_3)(4_1^{-1},4_2^{-1},4_3^{-1})\times$ $(3_2,3_4,3_3^{-1})(3_2^{-1},3_4^{-1},3_3)(2_1,2_3,2_6)\times(2_2,2_4,2_5)$.
30	Th	Td^{α}	$4_3^{\alpha}:(3_1,3_2,3_3,3_4)(3_1^{-1},3_2^{-1},3_3^{-1},3_4^{-1})(2_1,2_2)\times$ $(\tilde{6}_1,\tilde{6}_2,\tilde{6}_3,\tilde{6}_4)(\tilde{6}_1^{-1},\tilde{6}_2^{-1},\tilde{6}_3^{-1},\tilde{6}_4^{-1})(m_1,m_2)$; $3_1^{\alpha}:(m_1,m_2,m_3)(\tilde{6}_2,\tilde{6}_4,\tilde{6}_3^{-1})(\tilde{6}_2^{-1},\tilde{6}_4^{-1},\tilde{6}_3)\times$ $(3_2,3_4,3_3^{-1})(3_2^{-1},3_4^{-1},3_3)(2_1,2_2,2_3)$.
31	D_{6h}	D_{6h}^{α}	$6^{\alpha}:(2_1,2_2,2_3,2_4,2_5,2_6)\times(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5,m_6)$; $2^{\alpha}:(2_1,m_1)(2_2,m_2)(2_3,m_3)(2_4,m_4)\times$ $(2_5,m_5)(2_6,m_6)$; $2_1^{\alpha}:(2_2,2_6)(2_3,2_5)(m_2,m_6)(m_3,m_5)\times$ $(6,6^{-1})(3,3^{-1})(\tilde{6},\tilde{6}^{-1})(\overline{3},\overline{3}^{-1})$.
32	Oh	Oh^{α}	$4_3^{\alpha}:(3_1,3_2,3_3,3_4)(3_1^{-1},3_2^{-1},3_3^{-1},3_4^{-1})(\tilde{4}_1^2,\tilde{4}_2^2)\times$ $(4_1,4_2,4_1^{-1},4_2^{-1})(\tilde{4}_1,\tilde{4}_2,\tilde{4}_1^{-1},\tilde{4}_2^{-1})(m_8,m_9)\times$ $(\tilde{6}_1,\tilde{6}_2,\tilde{6}_3,\tilde{6}_4)(\tilde{6}_1^{-1},\tilde{6}_2^{-1},\tilde{6}_3^{-1},\tilde{6}_4^{-1})(m_1,m_2)\times$ $(2_1,2_4,2_2,2_3)(2_5,2_6)(m_4,m_7,m_5,m_6)$; $2^{\alpha}:(2_1,m_4)(2_2,m_5)(2_3,m_6)(2_4,m_7)\times$ $(2_5,m_8)(2_6,m_9)(4_2,\tilde{4}_2^{-1})(\tilde{4}_2,4_2^{-1})\times$ $(4_1,\tilde{4}_1^{-1})(\tilde{4}_1,4_1^{-1})(4_3,\tilde{4}_3^{-1})(\tilde{4}_3,4_3^{-1})$; $3_1^{\alpha}:(\tilde{4}_1^2,\tilde{4}_2^2,\tilde{4}_3^2)(\tilde{4}_1,\tilde{4}_2,\tilde{4}_3)(\tilde{4}_1^{-1},\tilde{4}_2^{-1},\tilde{4}_3^{-1})\times$ $(4_1,4_2,4_3)(4_1^{-1},4_2^{-1},4_3^{-1})(\tilde{6}_2,\tilde{6}_4,\tilde{6}_3^{-1})\times$ $(3_2,3_4,3_3^{-1})(3_2^{-1},3_4^{-1},3_3)(m_4,m_6,m_9)\times$ $(2_1,2_3,2_6)(2_2,2_4,2_5)\times$ $(\tilde{6}_2^{-1},\tilde{6}_4^{-1},\tilde{6}_3)(m_1,m_2,m_3)(m_5,m_7,m_8)$.

Referințe:

1. Вейль Г. Симметрия. - Москва: Наука, 1968.
2. Фёдоров Е.С. Начала учения о фигурах. - Москва: Изд-во АН СССР, 1953. Оригинальная работа: Записки Минералогического. Общ-ва. Серия 2. - 1885. - Т.21. - С.1-279.
3. Фёдоров Е.С. Симметрия правильных систем фигур. Симметрия и структура кристаллов. - Москва: Изд-во АН СССР, 1949. Оригинальная работа: Записки Минералогического. Общ-ва. Серия 2. - 1891. - Т.28. - С.1-146.
4. Schonflies A. Kristallsysteme und Kristallstruktur. - Leipzig, 1891 (ediția a doua în 1923).
5. Любарский Г. Я. Теория групп и её применение в физике. - Москва: Физматгиз, 1958.
6. Хамермеш М. Теория групп и её применение к физическим проблемам. - Москва: Мир, 1966.

7. Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве. - Москва: Наука, 1972.
8. Копцик В.А. Очерк развития теории симметрии и её приложений в физической кристаллографии за 50 лет // Кристаллография. - 1967. - Т.12. - Выпуск 5. - С.755-774.
9. Koptsik V.A. Generalized symmetry in crystal phisics // Comput. Math. Applic. - 1988. - Vol.16. - No. 5-8. - P.407-424.
10. Koptsik V.A. Crystallography of Quasicrystals. The Problem of Restoration of Broken Symmetry // Lecture Notes in Physics. - Springer. - 1991. - Vol.382. - P.588-601.
11. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.
12. Заморзаев А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии) // Кристаллография. – 1967. - Т.12. - Выпуск 5. - С.819-825.
13. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца, 1978. - 275 с.
14. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С, Лунгу А.П., Палистрант А.Ф. Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. - Кишинев: Штиинца, 1986. - 156 с.
15. Лунгу А.П. К теории $\overline{P}$ -симметрии. Рукопись депонирована в ВИНИТИ. - Москва, 1978, № 1709-78Деп. - 16 с.
16. Лунгу А.П. К методике вывода младших групп $\overline{P}$ -симметрии. Рукопись депонирована в ВИНИТИ. - Москва, 1979, № 1587-79Деп. - 22 с.
17. Заморзаев А.М., Лунгу А.П. К теории групп *P*-симметрии и её развитию // Труды Международного семинара „Теоретико-групповые методы в физике” (Звенигород, 20-30 ноября 1979г.). - Москва: Наука, 1980. - Т.1. - С.90-97.
18. Копцик В.А., Коцев И.Н. К теории и классификации групп цветной симметрии. II. W–симметрия // Сообщения ОИЯИ, Р4-8068. - Дубна. - 1974. - 17 с.
19. Лунгу А.П. К теории групп W–симметрии // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1992. - Nr.3(9). - P.72-81.
20. Лунгу А.П. Методика вывода полумладших и псевдомладших групп W–симметрии. // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1994. - Nr.2(15). - P.29-39.
21. Lungu A. Teoria generală a grupurilor de W_p –simetrie // Symposium septimum Tiraspolense „Generalis topologiae et suae applicationum”. - 5-11 august 1996. - Chişinău: Tehnica UTM, p.140-143.
22. Лунгу А.П. Универсальная методика вывода конечных групп W_p –симметрии // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe reale”. - Chişinău, 1997, p.16-22.
23. Лунгу А.П. Основы общей теории W_q -симметрии // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1996. - Nr.3(22). - P.94-100.
24. Лунгу А.П. К теории групп W_q –симметрии // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica. - 1997. - Nr.2(24). - P.77-86.
25. Lungu A. Grupuri de W_q-simetrie // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria „Ştiinţe fizico-matematice”. - Chişinău, 1998, P.11-17.
26. Lungu A. The discrete groups of generalized symmetry and the quasihomomorphic mappings // Scientific Annals Faculty of Mathematics and Informatics State University of Moldova. - Chisinau, 1999, p.115-124.
27. Lungu A. Discrete groups of W_q-symmetry // Proceedings of the 2nd International Conference on Symmetry and Antisymmetry in Mathematics, Formal Languages and Computer Science, Satelite Conference of 3ECM. - Brasov (Romania), 2000, p.175-184.
28. Курош А.Г. Теория групп. - Москва: Наука, 1967. - 648 с.
29. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. - Москва: Наука, 1977. - 288 с.
30. Zamorzaev A., Palistrant A., Lungu A. Teoria grupurilor discrete de simetrie. - Chişinău: CE USM. Partea I, 1991. - 105 p.; Partea II, 1992. - 100 p.
31. Zabolotnîi P., Pereteatcov S. Baza de date şi rezolvarea problemelor din cristalografia geometrică cu ajutorul computerului. - Chişinău: CE USM, 1991. - 58 p.

Prezentat la 13.09.2007