STUDIA UNIVERSITATIS
Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2007, nr.8

Посвящается 80-летию со дня рождения профессора Заморзаева А.М., члена-корреспондента АН Молдовы

ЛИНЕЙНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ КЛАССИЧЕСКИХ И n – МЕРНЫХ ЭВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ n ≥ 4

Александр ПАЛИСТРАНТ

Кафедра алгебры и геометрии

În articol autorul face o sinteză a rezultatelor privind generalizarea grupurilor liniare punctuale unidimensionale G_{10} de antisimetrie simplă şi *l*-multiplă, cu P–simetrii de rozete, tablete, hipertablete, cristalografice, hipercristalografice şi birozete.

Sunt descrise o serie de probleme ce pot fi rezolvate cu ajutorul grupurilor G^P_{210} şi G^P_{20} din P – simetriile de simetrii ce se conțin în categoriile noi ale spațiilor euclidiene dimensionale 4 ≤ n ≤ 7.

One-dimensional point groups G_{10} were generalized with the simple and *l*–fold antysymmetry, also with the rosetal, tabletal, hypertabletal, crystallographic, hipercrystallographic and birossetal P–symmetries. The number of the lineal point symmetry groups of classical spaces was proved and the number of the lineal point groups of the *n* – dimensional spaces (when 4 ≤ n ≤ 7) was put by means of the obtained groups G^P_{10} of the remarked particular cases of the P–symmetry.

1. Теория симметрии трехмерного эвклидова пространства, логически завершенная в конце девятнадцатого века в трудах Е.С. Федорова [1] и А.Шенфлиса [2], в двадцатом столетии достигла своего полного расцвета и не только глубоко проникла в разные отрасли современного естествознания, но и получила дальнейшее развитие. Одним из первых расширений понятия симметрии явилось шубниковское учение об антисимметрии [3], послужившее основой для широких применений этого учения в геометрической кристаллографии и ее новых обобщений [4; 5].

Толкование антисимметрии как двухцветной симметрии привело к понятию беловской цветной симметрии [6]; другим обобщением антисимметрии явилась заморзаевская антисимметрия различного рода (кратная), получаемая за счет приписывания точкам преобразуемой фигуры не одного, а любого числа *l* качественно различных знаков „+” или „–” [4].

Синтезом двух отмеченных путей обобщения антисимметрии явилось понятие цветной антисимметрии с разной трактовкой у Поли [7] и Нероновой с Беловым [8]. Геометры Молдавского университета уточнили понятие цветной антисимметрии в трактовках Поли и Нероновой-Белова, расширив последнюю до цветной антисимметрии различного рода [5; 9].

Перечисленные обобщения антисимметрии и цветной симметрии с охватившей их криптосимметрией А.Ниггли, Г.Вондраческа [10] и О.Витке [11] погружаются в схему заморзаевской Р-симметрии [12], сущность которой состоит (в отличие от антисимметрии) в произвольности числа р качеств, приписанных точкам фигуры, и (в отличие от беловской р – цветной симметрии) в произвольности группы Р подстановок этих качеств при изометрических преобразованиях фигуры [9].

Широта понятия Р-симметрии и ее многообразная применимость [5] вызвали к жизни различные принципы классификации Р-симметрий [9], из которых нам понадобится так называемый геометрический способ, позволивший выявить 32 различных кристаллографических Р-симметрий, в случае, когда группа подстановок качеств Р изоморфна каждому из 32 кристаллографических классов G_{30}, а точечными группами G^P_{30} этих 32 Р-симметрий – описать категорию шестимерных точечных групп симметрии с инвариантной трехмерной плоскостью G_{630} [14]. В дальнейшем геометрический способ классификации Р-симметрий был перенесен на розеточные, таблеточные, гипертаблеточные первого и второго порядков, в случае, когда группа Р изоморфна последовательно группам симметрии категорий G_{20}, G_{320}, G_{4320} и G_{54320}, подробно описанных в [15], а также на гиперкристаллографические первого и второго порядков, в случае, когда группа P изоморфна группам симметрии категорий G_{430} и G_{5430}, всесторонне проанализированных в [16; 17], и на бирозеточные, в случае, когда группа P изоморфна группам симметрии категории G_{420} [18].

Выявим с помощью групп G_{10}^{P} отмеченных частных случаев P-симметрии количество точечных групп симметрии, содержащихся в классических и n-мерных эвклидовых пространствах при $n \geq 4$.

2. Приведем необходимые понятия и факты, связанные с решением поставленной задачи. Приписывая каждой точке фигуры хотя бы один индекс $i = 1, 2,\ldots, p$ и фиксируя некоторую группу P подстановок этих индексов, называем преобразованием P-симметрии фигуры ее изометрическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом k_j так, чтобы подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots.. & P \\ k_1 & k_2 & k_p \end{pmatrix} \in$ P; такие преобразования разлагаются на преобразования симметрии рассматриваемой фигуры и подстановки из P. Преобразования P-симметрии фигуры составляют мультипликативную группу G, входящие в них преобразования симметрии – ее порождающую группу S, а подстановки индексов – группу P_1; при $P_1 = P$ называем G группой полной P-симметрии, при $e \subset P_1 \subset P$ – неполной P-симметрии, а при $P_1 = e$ группа $G = S$. Если положим, что $Q = G \cap P$, то получим деление групп полной P-симметрии на старшие, младшие и Q-средние, соответственно случаям $Q = P$, $Q = e$ и $e \subset Q \subset P$. Группу G полной P-симметрии любого типа можно вывести из ее порождающей S путем выделения в S и P нормальных делителей H и Q, для которых существует изоморфизм фактор-группы S/H на P/Q, попарного перемножения соответствующих по изоморфизму смежных классов и объединения полученных произведений (основная теорема А.М. Заморзаева о P-симметрии [12; 5; 9]).

В схеме P-симметрии шубниковская антисимметрия [3] является 2-симметрией и характеризуется группой P = {(1,2)}, заморзаевская антисимметрия различного рода (*l*- кратная) [4] выступает как (2,…,2)-симметрия (где цифра 2 повторяется *l* раз), беловская цветная симметрия [6], именуемая в [5] p-симметрией, соответствует циклической группе P={(1,2,.., p)}, цветная антисимметрия Поли [7], получившая в [5; 9] название (p/)-симметрии, задается группой P= $\{(1,\ldots,p)(\overline{p},\ldots,\overline{1}),(1,\overline{1})\ldots(p,\overline{p})\}$ с 2p преобразуемыми качествами, изоморфной диэдрической группе $Д_p$ (ср.[5; 9]), цветная антисимметрия Нероновой-Белова [8], получившая в [5; 9] название (p_1, 2)- симметрии, характеризуется группой $P \cong C_{p_1} \times C_2$ ($p = 2\, p_1$, $p_1 > 2$); цветная антисимметрия различного рода, получившая в [5,9] название (p_1, 2, …, 2)-симметрии, задается группой $P \cong Cp_1 \times C_2^1 \times \ldots \times C_2^{(l)}$ $(p = p_1 \cdot 2^l,\ p_1 > 2,\ l \geq 2)$; при $P \cong D_{p_1}\, C_2^1 \times \ldots \times C_2^{(l)}$ ($p = 2p_1 \cdot 2^l$, где $p_1>2$, $l \geq 1$) получаем кратную (p/)-антисимметрию, или $(p_1^/, 2, \ldots, 2)$-симметрию; в случае, когда группа P допускает точное неприводимое представление, получается простая криптосимметрия Ниггли, Вондраческа и Витке [10; 11].

Если же группа P изоморфна одной из кристаллографических точечных групп симметрии розеток G_{20}, таблеток G_{320}, гипертаблеток первого рода G_{4320} и гипертаблеток второго рода G_{54320} , то геометрический способ классификации P-симметрий [13] дает, соответственно, 10 розеточных, 31 таблеточную, 125 гипертаблеточных P-симметрий первого порядка и 671 гипертаблеточную P-симметрию второго порядка [15], а при P, изоморфной последовательно трехмерным кристаллографическим точечным группам G_{30}, либо гиперкристаллографическим группам первого порядка G_{430}, либо гиперкристаллографическим группам второго порядка G_{5430}, упомянутый геометрический способ классификации P-симметрий приводит, соответственно, к 32 кристаллографическим P-симметриям, либо к 122 гиперкристаллографическим P-симметриям первого порядка, либо к 624 гиперкристаллографическим P-симметриям второго порядка [16; 17]. Наконец, когда группа P изоморфна последовательно кристаллографическим бирозеточным группам симметрии G_{420}, геометрический метод классификации P-симметрий приводит к 263 различным бирозеточным P-симметриям [18].

Индексы и знаки, приписываемые точкам фигуры при рассмотрении групп P-симметрии, порождаемой ее группой симметрии, имеют внегеометрический смысл по отношению к пространству, в котором рассматривается исследуемая фигура; в добавочном измерении индексы и знаки, приписываемые точкам рассматриваемой фигуры, могут толковаться геометрически [5; 9; 14-17], что позволяет использовать полученные группы P-симметрии “индексированной” фигуры для описания некоторых категорий групп симметрии многомерных пространств.

В настоящей статье предлагается обобщить одномерные линейные точечные группы симметрии G_{10} до групп простой и кратной антисимметрии, а также до групп розеточных, таблеточных, гипертаблеточных, кристаллографических, гиперкристаллографических, а также бирозеточных Р-симметрий, и полученные группы использовать для выявления точечных линейных групп симметрии классических и *n*-мерных евклидовых пространств при $n \geq 4$.

3. Рассмотрим нульмерное пространство E_o, изображаемое асимметричной точкой. Ясно, что группа симметрии G_0 этого пространства задается тождественным преобразованием 1. Обобщая эту группу до групп симметрии и антисимметрии, получим группы категории G_0^1, исчерпывающиеся порождающей и старшей группой 1 и $1\underline{1}$ [4]. Группами G_0^1 моделируются точечные группы 1 и m категории G_{10}, если знаками "+" или "-", приписанными асимметричной точке пространства E_0, обозначать расположение точки одномерного пространства E_1, изображаемого прямой по одну или другую сторону от ее инвариантной точки (начала координат оси *ox*).

Если точечные группы 1 и m категории G_{10} обобщить с понятием антисимметрии, то получим пять групп симметрии и антисимметрии категории G_{10}^1, исчерпывающихся двумя порождающими 1 и m, двумя старшими $11'$ и $m1'$ и одной младшей группой m' [4] . В свою очередь, группами симметрии и антисимметрии категории G_{10}^1 интерпретируются последовательно точечные группы 1, 1m, m1, mm и 2 категории G_{210} (конечных бордюров, или страниц), если знаками "+" или "-" точек одномерного пространства обозначить знаки ординаты точек двумерного пространства E_2 [2] относительно инвариантной точки групп G_{210}, принятой за начало координат рассматриваемой декартовой прямоугольной системы. Далее, если группы симметрии конечных бордюров G_{210} расширить до групп симметрии и антисимметрии, то получим пять порождающих, пять старших и шесть младших групп категории G_{210}^1, которыми моделируются все 16 различных групп симметрии категории G_{3210}, называемых группами симметрии конечных лент, или плит [4], сохраняющих в пространстве три попарно перпендикулярные между собой плоскости и прямые их пересечения, а также точку пересечения отмеченных плоскостей (инвариантную точку групп категории G_{3210}).

С другой стороны, если группу симметрии 1 категории G_0 обобщить с понятием трехкратной антисимметрии [4], то получим 16 групп категории G_0^3, из которых одна порождающая 1, семь старших одного рода: $1\underline{1}$- старшая рода 1 (короче C_1), $11'$- старшая рода 2 (C_2), 1^*1- старшая рода 3 (C_3), $1\underline{1}'$- старшая рода (1,2) (C_{12}), аналогично получаются C_{13}, C_{23} и C_{123}; семь старших двух независимых родов: $1\underline{1}1'$- старшая рода 1 и рода 2 (короче C_1C_2), аналогично записываются группы C_1C_3, C_2C_3, C_1C_{23}, C_2C_{13}, C_3C_{12}, $C_{13}\,C_{23}$, и одна старшая трех независимых родов $1\underline{1}1'\,{}^*1$ ($C_1C_2C_3$), в записи которых смысл черты под символом элемента симметрии, знака штрих, приписанного справа вверху и знака звездочки, приписанного слева вверху элемента симметрии, а также их сочетаний по два и три при одном элементе, непосредственно вытекает из текста [4].

Если же группы симметрии категории G_{10} обобщить с двукратной антисимметрией [4], то получим также 16 групп категории G_{10}^2, из которых 2 порождающих 1 и m, две старших рода 1 ($11'$ и $m1'$), две старших рода 2 (1^*1, m^*1), две старших рода (1,2) ($1^*1'$, m^*1'), две старших двух различных родов ($11'\,{}^*1$, $m1'{}^*1$), одна младшая рода 1 m' , одна младшая рода 2 ${}^*m$, одна младшая рода (1,2) ${}^*m'$, одна старшая рода 1 и младшая рода 2 ${}^*m1'$, одна старшая рода 2 и младшая рода 1 $m'1^*$, а также одна старшая рода (1,2) и младшая рода 2 ${}^*m^*1'$ [4].

В результате у нас получилось, что категории G_0^3, G_{10}^2, G_{210}^1 и G_{3210} содержат одинаковое количество групп. Совпадение отмеченных чисел групп не случайно. Оказывается, что группами симметрии и трехкратной антисимметрии G_0^3 моделируются группы симметрии и двукратной антисимметрии отрезков G_{10}^2, группы симметрии и антисимметрии конечных бордюров G_{210}^1 и группы симметрии конечных лент G_{3210}. В свою очередь, группами категорий G_{10}^2 можно интерпретировать группы категорий G_{210}^1 и G_{3210}, а группами категории G_{210}^1 – группы категории G_{3210} (ср. [19]).

Для указанного соответствия между группами G_0^3 и G_{3210} достаточно первый знак точки группы G_0^3 толковать как знак абсциссы, второй знак точки группы G_0^3 толковать как знак ординаты, а третий знак точки группы G_0^3 – как знак апликаты точек группы G_{3210} относительно трехмерной декартовой системы координат с началом в особенной точке группы G_{3210}, осями *ox* и *oy* в инвариантной плоскости группы G_{3210} и осью апликат, совпадающей с инвариантной прямой группы G_{3210}. В свою очередь, для отмеченного соответствия между группами G_0^3 и G_{10}^2 достаточно первый знак точки группы G_0^3 истолковать как знак абсциссы точек группы G_{10}^2 относительно одномерной декартовой системы координат с началом в особенной точке группы G_{10}^2 и прямой, совпадающей с инвариантной прямой группы G_{10}, а остальные два знака точки группы G_0^3 – как знаки точек группы G_{10}^2 и т.д.

Полное соответствие между группами категорий G_0^3, G_{10}^2 G_{210}^1 и G_{3210} в порядке их записи в интернациональной символике представлено в таблице 1. Превращения элемента симметрии в элемент антисимметрии в первых трех столбцах этой таблицы обозначается по-разному: чертой под символом элемента в первом столбце, штрихом справа вверху символа во втором столбце и звездочкой слева вверху символа в третьем столбце, буква m во втором столбце толкуется как центр отражения, в третьем – как ось отражения, а в четвертом – как плоскость отражения; цифра 2 в третьем столбце толкуется как центр отражения, а в четвертом столбце – как ось вращения второго порядка (ср.стр.71 в [4]).

Таблица 1

Сравнение групп категорий G_0^3, G_{10}^2, G_{210}^1 и G_{3210}

Нульмерные группы симметрии и трехкратной антисимметрии G_0^3	Группы		
	симметрии и двухкратной антисимметрии отрезков G_{10}^2	симметрии и антисимметрии конечных бордюров G_{210}^1	симметрии конечных лент G_{3210}
$1,\ 1\underline{1},\ 11',\ 1^*1,$ $1\underline{1}',\ 1^*\underline{1},\ 1^*1',$ $1^*\underline{1}',\ 1\times\underline{1}\times 1',\ 1\times\underline{1}\times{}^*1,$ $11'^*1,\ 1\underline{1}^*1',\ 11'^*\underline{1}$ $1^*1\underline{1}',\ 1^*\underline{1}^*1',\ 1\underline{1}1'^*1$	$1,\ m,\ 11',\ 1^*1,$ $m'1,\ {}^*m1,\ 1^*1',$ ${}^*m',\ m1',\ m^*1,$ $1\times 1'\times{}^*1,\ m^*1',\ {}^*m1'$ $m'^*1,\ {}^*m^*1',\ m1'^*1$	$1,\ m1,\ 1m,\ {}^*1$ $2,\ {}^*m1,\ 1^*m,$ ${}^*2,\ mm,\ m1^*1$ $1m^*1,\ m^*m,\ {}^*mm$ $2^*1,\ {}^*m^*m,\ mm^*1$	1, m11, 1m1, 11m 112, 121, 211, $\bar{1}$, mm2, m2m 2mm, 2/m11, 12/m1, 112/m, 222, mmm

Аналогичная сильноизоморфная связь имеется между группами *l*-кратной антисимметрии отрезков G_{10}^l при $l \geq 3$ и группами симметрии категории $G_{(l+1)l(l-1)\ldots 10}$ при отмеченных значениях *l*. А это означает, что не только количество групп *l*-кратной антисимметрии отрезков G_{10}^l совпадает с количеством различных групп симметрии категории $G_{(l+1)l(l-1)\ldots 10}$ при отмеченных значениях *l*, но и соответствующие друг другу группы из категории G_{10}^l и категории $G_{(l+1)l(l-1)\ldots 10}$ при одном и том же значении *l* имеют одинаковое строение [20].

Количество групп *l*–кратной антисимметрии отрезков G_{10}^l при $l = 3 \div 6$ найдем по формулам (*): $P_3 = 16 N_0 + 35 N_1 + 14N_2 + N_3$; $P_4 = 67 N_0 + 240 N_1 + 175N_2 + 30N_3 + N_4$; $P_5 = 374N_0 + 2077N_1 + 2480N_2 + 775N_3 + 62N_4 + N_5$; $P_6 = 2825N_0 + 23562N_1 + 43617N_2 + 22320N_3 + 3255N_4 + 126 N_5 + N_6$, извлеченным из [4]. В этих формулах через P_l обозначено число всех различных групп *l*–кратной антисимметрии данного подразделения при $l = 3 \div 6$, через N_0 – число различных групп классической симметрии рассматриваемого подразделения, а через N_l – число младших *l* независимых родов групп данного подразделения при $l = 1 \div 6$ (ср. со стр. 96 в [4]).

Для групп G_{10}^{l} $N_0 = 2$, $N_1 = 1$, а $N_2 = \ldots = N_6 = 0$. Подставляя отмеченные значения N_l при $l = 0 \div 6$ в указанные формулы (*), получаем, что $G_{10}^{3} = 67$; $G_{10}^{4} = 374$; $G_{10}^{5} = 2825$; $G_{10}^{6} = 29212$.

Опираясь на сказанное выше, приходим к выводу , что в $(l + 1)$-мерном эвклидовом пространстве при $l = 3 \div 6$ имеется 67 групп категории G_{43210} ; 374 группы категории G_{543210} ; 2825 групп категории $G_{6543210}$ и 29212 групп симметрии категории $G_{76543210}$ (соответственно полным числам групп G_{10}^{l} l- кратной антисиметрии при $l = 3 \div 6$ (ср. [19]).

4. Рассмотрим теперь одномерные линейные точечные группы G_{10}^{P} розеточных, таблеточных и гипертаблеточных Р-симметрий.

Одномерные линейные точечные группы G_{10}^{P} 10 розеточных Р-симметрий, исчерпывающихся р- и (р/)- симметриями при р = 1, 2, 3, 4, 6 [15], в случае, когда группа подстановок Р изоморфна последовательно 10 двумерным кристаллографическим точечным группам симметрии G_{20}, полностью исследованы в [21]. Таких групп оказалось 31, из которых 2 порождающих 1 и m , 18 старших $11^{/}$, $m1^{/}$, $11^{(2)}$, $m1^{(2)}$, $11^{(3)}$, $m1^{(3)}$, $11^{(4)}$, $m1^{(4)}$, $11^{(6)}$, $m1^{(6)}$, $11^{(2\,1^{/})}$, $m1^{(2\,1^{/})}$, $11^{(3\,1^{/})}$, $m1^{(3\,1^{/})}$, $11^{(4\,1^{/})}$, $m1^{(4\,1^{/})}$, $11^{(6\,1^{/})}$, $m1^{(6\,1^{/})}$; 2 младших $m^{/}$ и $m^{(2)}$ и 9 Q-средних: $m^{(4)}$, $m^{(6)}$, $m^{(2\,1^{/})}$, $m^{/)}1^{(2}$, $m^{/)}1^{(3}$, $m^{(4\,1^{/})}$, $m^{/)}1^{(4}$, $m^{(6\,1^{/})}$, $m^{/)}1^{(6}$. Оказывается, что точечных кристаллографических групп симметрии двухсторонней плоскости, вложенной в трехмерное пространство (групп симметрии таблеток) $G_{320} = G_{310}$ – точно такое же число. Количественное совпадение одномерных точечных линейных групп G_{10}^{P} розеточных Р-симметрий и кристаллографических точечных групп конечных цилиндров G_{310} не случайно, так как между группами этих двух категорий имеется сильноизоморфное соответствие, то есть каждая группа категории G_{10}^{P} задает порядок и строение определенной группе симметрии категории G_{310}. При этом группы симметрии и антисимметрии G_{10}^{1} соответствуют цилиндрическим G_{310} без главных осей, если знаки „+" или „–", приписанные точками отрезка, толковать как расположение точек конечного цилиндра по определенные стороны от плоскости, проходящей через его ось. Группы р-симметрии G_{10}^{P} соответствуют цилиндрическим без боковых элементов симметрии, если индексы 1,…, р в точках отрезка толковать как расположение точек внутри определенных р равных двугранных углов, окружающих ось цилиндра, а группы (р/)- симметрии $G_{10}^{P/}$ соответствуют цилиндрическим общего типа при толковании индексов со знаками 1, …, р и $\overline{1}$, …, $\overline{p}$ в виде 2р общих положений точек цилиндра внутри р равных двугранных углов, сходящихся по его оси (ср. [21]). Полное сопоставление этих групп в интернациональной символике в порядке перечисления приведено в таблице 2.

Осуществим теперь независимый подсчет групп G_{10}^{P} 10 розеточных Р-симметрий, подробно описанных в [15]. Порождающих групп этой категории две: 1 и m. Так как 1-симметрия является классической, а для каждой из остальных 9 розеточных Р-симметрий из любой порождающей выводится по одной старшей, то всего старших групп G_{10}^{P} будет 2×9 = 18. Подсчет младших групп G_{10}^{P} розеточных Р-симметрий осуществим по специально разработанной в [15] для этих целей формуле $2M_2 + M_3 + M_4 + M_6 + M_{2/} + M_{3/} + M_{4/} + M_{6/}$ (где индекс в символе M_p, обозначающий количество младших групп, указывает конкретное наименование Р-симметрии, с которой связано число M_P, а цифра 2 – количество Р-симметрий в классе изоморфности 2-симметрии [20]), а подсчет Q- средних групп G_{10}^{P} этих Р-симметрий – по формуле $9M_2 + M_3 + 2M_{2/} + M_{3/}$ (где символ M_p сохраняет прежний смысл, а числовые множители задают количество всевозможных фактор-групп P/Q, сильноизоморфных группам подстановок Р, характеризующих отмеченные Р-симметрии [15]).

Для групп G_{10}^{P} $M_2 = 1$, а остальные M_p, фигурирующие в выписанных формулах, равны 0. Подставив значение M_2 в приведенные выше формулы, получим, что две группы категории G_{10} порождают 2 младших и 9 Q-средних. Таким образом, из групп G_{10} при их обобщении с 10 розеточными

Р-симметриями при Р ≅ G_{20} выводится 2 порождающих, 18 старших, 2 младших и 9 Q- средних групп G_{10}^{P} полной Р-симметрии, которыми изображаются кристаллографические точечные группы конечных цилиндров G_{310} , что и показано в таблице 2.

Таблица 2

Сопоставление одномерных точечных групп розеточных Р-симметрий
и групп симметрии конечных цилиндров

Группы G_{10}^{P} розеточных Р-симметрий	Группы симметрии конечных цилиндров G_{310}
$1, 11'$; m, m' , $m1'$; $11^{(2)}$; $m^{(2)}$ $m1^{(2)}$; $11^{(3)}$; $m1^{(3)}$, $11^{(4)}$, $m1^{(4)}$, $m^{(4)}$; $11^{(6)}$, $m1^{(6)}$, $m^{(6)}$; $11^{(2\,1')}$; $m1^{(2\,1')}$, $m^{(2\,1')}$, $m^{\prime)}1^{(2}$, $11^{(3\,1')}$; $m1^{(3\,1')}$; $m^{\prime)}1^{(3}$; $11^{(4\,1')}$, $m1^{(4\,1')}$, $m^{(4\,1')}$, $m^{\prime)}1^{(4}$; $11^{(6\,1')}$, $m1^{(6\,1')}$, $m^{(6\,1')}$, $m^{\prime)}1^{(6}$	1, m11, 11m, 121, m2m, 112, $\overline{1}$, 112/m, 113, 113/m, 114, 114/m, $11\overline{4}$, 116 , 116/m $11\overline{6}$, mm2, mmm, 2/m11, 222, 3m, $\overline{6}m2$, 32, 4mm, 4/mmm, $\overline{4}2$m, 422, 6mm, 6/mmm, $\overline{3}$m, 622.

Обобщая далее группы симметрии категории G_{10} с 31 таблеточной Р-симметрией при Р ≅ G_{320}, получим 2 порождающих группы 1 и m и 60 (2×30) старших. Подсчет младших и Q-средних групп G_{10}^{P} этих Р-симметрий осуществим по сокращенным формулам (**): $5M_2 + M_3 + 2M_4 + 3M_6 + M_{2'} + 2M_{3'} + 2M_{4'} + M_{\underline{4}'} + 2M_{6'} + 2M_{\underline{6}'} + 3M_{2\underline{1}}$ и $58M_2 + 4M_3 + 2M_4 + 3M_6 + 10M_{2'} + 5M_{3'} + 2M_{4'} + 2M_{6'} + 14M_{2\underline{1}}$, извлеченным из универсальных формул работы [15] по подсчету младших и Q-средних групп, порожденных группами симметрии любой категории при их обобщении с таблеточными Р-симметриями.

В связи с тем, что для групп G_{10}^{P} таблеточных Р-симметрий $M_2 = 1$, а остальные M_p, фигурирующие в формулах (**), для этих Р-симметрий равны нулю, мы получаем, что при обобщении групп G_{10} с таблеточными Р-симметриями имеется 2 порождающих + 60 старших + 5 младших + 58 Q-средних = = 125 групп G_{10}^{P}, которыми интерпретируются все 125 групп симметрии категории G_{4310} [15].

Подсчет групп G_{10}^{P} 125 гипертаблеточных Р-симметрий первого порядка при Р ≅ G_{4310} осуществляется по укороченным формулам ($_*{*}_*$): $11M_2 + M_3 + 4M_4 + 7M_6 + 4M_{2'} + 19M_{2\underline{1}} + 4M_{3'} + 4M_{4'} + 6M_{\underline{4}'} + 4M_{6'} + 12M_{\underline{6}'}$ и $410M_2 + 15M_3 + 16M_4 + 28M_6 + 56M_{2'} + 27M_{3'} + 16M_{4'} + 16M_{6'} + 240M_{2\underline{1}} + 6M_{\underline{4}'} + 21M_{\underline{6}'}$, извлеченным из универсальных формул работы [15] по подсчету младших и Q-средних групп, порождаемых кристаллографическими группами симметрии любой категории при их обобщении с гипертаблеточными Р-симметриями первого порядка.

Так, для групп G_{10}^{P} при Р ≅ G_{4320} $M_2 = 1$, а остальные Mр, фигурирующие в формулах ($_*{*}_*$), равны нулю, и обобщая две группы 1 и m категории G_{10} с гипертаблеточными Р-симметриями первого порядка, получим 2 порождающих + 248 (2×124) старших + 11 младших + 410 Q-средних – всего 671 группу G_{10}^{P} гипертаблеточных Р-симметрий первого порядка, которыми моделируются столько же различных групп симметрии, составляющих категорию G_{54310} [15].

Обобщим, наконец, одномерные точечные группы G_{10} с хорошо изученной в [15] 671 гипертаблеточной Р-симметрией второго порядка при Р ≅ G_{5420} . Количество младших и Q- средних групп категории G_{10}^{P} этой 671 группы Р-симметрии определим по формулам $\binom{**}{**}$: $23M_2 + M_3 + 8M_4 + 15M_6 + 8M_{2'} + 91M_{2\underline{1}} + 8M_{3'} + 8M_{4'} + 28M_{\underline{4}'} + 6M_{6'} + 56M_{\underline{6}'}$ и $3520M_2 + 66M_3 + 120M_4 + 225M_6 + 376M_{2'} + 3766M_{2\underline{1}} + 17M_{3'} + 120M_{4'} + 112M_{\underline{4}'} + 120M_{6'} + 301M_{\underline{6}'}$, извлеченным из универсальных формул [15], предназначенных для выявления количества младших и Q-средних групп, порождаемых кристаллографическими группами симметрии любой категории при их обобщении с гипертаблеточными Р-симметриями второго порядка [15].

Так как для групп G_{10}^{P} $M_2 = 1$, а остальные M_P, фигурирующих в формулах $\begin{pmatrix} ** \\ ** \end{pmatrix}$, равны 0, то обобщая группы G_{10} с гипертаблеточными Р-симметриями второго порядка, получим 2 порождающих + 1340 (2×670) старших + 23 младших + 3520 Q-средних – всего 4885 групп G_{10}^{P}, которыми моделируются 4885 групп симметрии категории G_{654310} [15].

5. Обобщим теперь группы G_{10} с кристаллографическими и гиперкристаллографическими Р-симметриями, подробно расписанными в [16, 17]. Подсчет младших и Q-средних групп G_{10}^{P} кристаллографических Р-симметрий при $P \cong G_{30}$ осуществим по формулам (V): $3M_2 + M_3 + 2M_4 + 3M_6 + M_{22} + M_{2\underline{2}} + M_{2\underline{1}} + 2M_{32} + 2M_{42} + M_{\underline{4}2} + 2M_{62} + 2M_{\underline{6}2}$ и $55M_2 + 6M_3 + 2M_4 + 4M_6 + M_{22} + 9M_{2\underline{2}} + 13M_{2\underline{1}} + 8M_{32} + 2M_{42} + 2M_{62} + 2M_{\underline{6}2}$, извлеченным из полных универсальных формул [16], предназначенных для выявления количества младших и Q-средних групп Р-симметрии, порождаемых группами симметрии любой категории при их обобщении с 32 кристаллографическими Р-симметриями.

Для групп G_{10}^{P} кристаллографических Р-симметрий $M_2 = 1$, а остальные Mp, фигурирующие в формулах (V), равны нулю. При этих значениях Mp из формул (V) получаем 3 младших и 55 Q-средних групп. Таким образом, при обобщении двух групп 1 и m категории G_{10} с 32 кристаллографическими Р-симметриями получаем 2 порождающих + 62 старших + 3 младших + 55Q-средних – всего 122 группы G_{10}^{P}, которыми изображаются все 122 различных группы симметрии категории G_{410}, тождественно совпадающие с группами симметрии категории G_{430}, которые, в свою очередь, моделируются трехмерными точечными группами симметрии и антисимметрии G_{30}^{1} [3-5, 9]. Иначе говоря, между группами G_{10}^{P} 32 кристаллографических Р-симметрий и группами симметрии категории G_{410}, а также с изображаемыми их группами категории G_{30}^{1}, имеется сильноизоморное соответствие [20].

Для каждой группы категории G_{10}^{P} 32 кристаллографических Р-симметрий укажем изображаемую её группу категории G_{30}^{1}, так как для групп симметрии категории G_{410} еще не разработана символика для их записи. При этом соответствии между группами G_{10}^{P} и G_{30}^{1} антитождественному преобразованию $\underline{1}$ в группах категории G_{10}^{P} будет соответствовать зеркальный поворот второго порядка (инверсия) в группах категории G_{30}^{1}, а отражению m от точки в группах G_{10}^{P} будет соответствовать антитождественное преобразование $1'$ в группах G_{30}^{1}. Далее, порождающей группе 1 категории G_{10}^{P} и выводимым из нее старшим группам будут соответствовать 32 порождающих группы категории G_{30}^{1}; группе m категории G_{10}^{P} и выводимым из нее старшим группам будут соответствовать 32 старших группы категории G_{30}^{1}; младшим группам $\underline{m}$, $m^{(2)}$ и $\underline{m}^{(2)}$, а также Q-средним категории G_{10}^{P}, полный список которых впервые представлен, будут соответствовать 58 младших групп категории G_{30}^{1}.

Полное сопоставление в интернациональной символике в порядке записи одномерных точечных групп G_{10}^{P} кристаллографических Р-симметрий с сильноизоморфными с ними трехмерными точечными группами G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии с соблюдением вышеупомянутых разъяснений приведено в таблице 3.

Таблица 3

Сопоставление одномерных точечных групп G_{10}^{P} кристаллографических Р-симметрий и трехмерных точечных групп G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии

Одномерные точечные группы G_{10}^{P} 32 кристаллографических Р-симметрий	Трехмерные кристаллографические точечные группы G_{30}^{1} симметрии и антисимметрии
$1;\ 11^{(2)},\ 11^{(3)},\ 11^{(4)},\ 11^{(6)},\ 11^{(22)},\ 11^{(3.2)}$	$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 222,\ 322$
$11^{(42)},\ 11^{(62)},\ 11^{(23)},\ 11^{(43)},\ 1\underline{1}$	$422,\ 622,\ 23,\ 432,\ \bar{1}$
$11^{(2\underline{1})},\ 11^{(3\underline{1})},\ 11^{(4\underline{1})},\ 11^{(6\underline{1})},\ 11^{(22\underline{1})}$	$2/m,\ \bar{3},\ 4/m,\ 6/m,\ mmm$
$11^{(32\underline{1})},\ 11^{(42\underline{1})},\ 11^{(62\underline{1})},\ 11^{(231)}$	$\bar{3}m,\ 4/mmm,\ 6/mmm,\ m3$
$11^{(43\underline{1})},\ 11^{(\underline{2})},\ 11^{(\underline{4})},\ 11^{(\underline{6})},\ 11^{(2\underline{2})},\ 11^{(3\underline{2})}$	$m3m,\ m,\ \bar{4},\ \bar{6},\ mm2,\ 3m$
$11^{(4\underline{2})},\ 11^{(\underline{4}2)},\ 11^{(6\underline{2})},\ 11^{(\underline{6}2)},$	$4mm,\ \bar{4}2m,\ 6mm,\ \bar{6}m2$
$11^{(\underline{4}3)},\ m,\ m1^{(2)},\ m1^{(3)},\ m1^{(4)},\ m1^{(6)}$	$\bar{4}3m;\ 1^{/},\ 21^{/},31^{/},\ 41^{/},\ 61^{/}$
$m1^{(22)},\ m1^{(32)},\ m1^{(42)},\ m1^{(62)}$	$2221^{/},\ 3221^{/},\ 4221^{/},\ 6221^{/}$
$m1^{(23)},\ m1^{(43)},\ m\underline{1},\ m1^{(2\underline{1})},\ m1^{(3\underline{1})}$	$231^{/},\ 4321^{/},\ \bar{1}1^{/},\ 2/m1^{/},\ \bar{3}1^{/}$
$m1^{(4\underline{1})},\ m1^{(6\underline{1})},\ m1^{(22\underline{1})},$	$4/m1^{/},\ 6/m1^{/},\ mmm1^{/}$
$m1^{(32\underline{1})},\ m1^{(42\underline{1})},\ m1^{(62\underline{1})},\ m1^{(23\underline{1})}$	$\bar{3}m1^{/},\ 4/mm1^{/},\ 6/mmm1^{/},\ m31^{/}$
$m1^{(43\underline{1})},\ m1^{(\underline{2})},\ m1^{(\underline{4})},\ m1^{(\underline{6})},\ m1^{(2\underline{2})}$	$m3m1^{/},\ m1^{/},\ \bar{4}1^{/},\ \bar{6}1^{/},\ mm21^{/}$
$m1^{(3\underline{2})},\ m1^{(4\underline{2})},\ m1^{(\underline{4}2)},\ m1^{(6\underline{2})}$	$3m1^{/},\ 4mm1^{/},\ \bar{4}2m1^{/},\ 6mm1^{/}$
$m1^{(\underline{6}2)},\ m1^{(\underline{4}3)};\ m^{(2)},\ m^{(4)},\ m^{(6)}$	$\bar{6}m21^{/},\ \bar{4}3m1^{/};\ 2^{/},\ 4^{/},\ 6^{/}$
$m^{2)}1^{(2},\ m^{(32)};\ m^{2)}\,1^{(4},\ m^{(4}1^{2)}$	$22^{/}2^{/},\ 32^{/}2^{/},\ 42^{/}2^{/},4^{/}22^{/};$
$m^{2)}1^{(6},\ m^{(6}\,1^{2)};\ m^{(4}1^{3)},\ \underline{m},$	$62^{/}2^{/},\ 6^{/}22^{/};\ 4^{/}32^{/},\ \bar{1}^{/}$
$m^{(2}\,\underline{1},\ \underline{m}1^{(2},\ m^{(2}1^{(2};\ m^{(3\underline{1})};\ m^{(4}\,\underline{1}$	$2^{/}/m^{/},\ 2/m^{/},\ 2^{/}/m;\ \bar{3}^{/};\ 4^{/}/m^{/}$
$\underline{m}1^{(4},\ m^{(4}\,1^{(\underline{2}};\ m^{(6}\,\underline{1},\ \underline{m}\,1^{(6},\ m^{(6}\,1^{(\underline{2}}$	$4/m^{/},\ 4^{/}/m;\ 6^{/}m^{/},\ 6/m^{/},\ 6^{/}/m;$
$\underline{m}1^{(22)},\ m^{2)}1^{(2}\,\underline{1},\ \underline{m}1^{(\underline{2}}1^{\underline{2})},$	$m^{/}m^{/}m^{/},\ mm^{/}m^{/},\ m^{/}mm$
$m^{(2)}1^{(3\underline{1})},\ m^{(3\underline{1})}\,1^{(\underline{2})},\ m^{(3\underline{1})}\,1^{(2)};\ \underline{m}1^{(42)},$	$\bar{3}m^{/},\ \bar{3}^{/}m,\ \bar{3}^{/}m^{/};\ 4/m^{/}m^{/}m^{/},$
$m^{(4}1^{2)}\,\underline{1},\ m^{2)}1^{(4}\underline{1},\ \underline{m}\,1^{(4}1^{\underline{2})}$	$4^{/}/mmm^{/},\ 4/mm^{/}m^{/},\ 4/m^{/}mm$
$m^{(4}\underline{1}1^{(\underline{2})};\ \underline{m}1^{(62)},\ m^{(6}1^{2)}\,1$	$4^{/}/m^{/}mm^{/},\ 6/m^{/}m^{/}m^{/},\ 6^{/}/mmm^{/},$
$m^{2)}\,1^{(6}\,\underline{1},\ \underline{m}1^{(4}1^{\underline{2})},\ m^{(6}\underline{1}\,1^{\underline{2})}$	$6/mm^{/}m^{/},\ 6/m^{/}mm,\ 6^{/}/m^{/}mm^{/}$
$m^{(23\underline{1})},\ m\,(1^{(4},\ 1^{3)}),\ m^{(4}(1^{(3}\underline{1}),\ m^{(4}(1^{3)}1^{(2}\underline{1})$	$m^{/}3;\ m^{/}3m^{/};\ m3m^{/},\ m^{/}3m,$
$m^{(\underline{2})};\ m^{(\underline{4})},m^{(\underline{6})};\ m^{(2}\,1^{\underline{2})},\ m^{\underline{2})}1^{(2};$	$m^{/};\ \bar{4}^{/},\ \bar{6}^{/};\ mm^{/}2^{/},\ m^{/}m^{/}2;$
$m^{(\underline{2}}1^{(3};\ m^{\underline{2})}1^{(4},\ m^{(4}1^{\underline{2})};\ m^{2)}1^{(6}$	$3m^{/};\ 4m^{/}m^{/},\ 4^{/}mm^{/};\ 6m^{/}m^{/},$
$m^{(6}1^{\underline{2})};\ m^{(\underline{4}}1^{2)};\ m^{\underline{2})}1^{(\underline{4}},$	$6^{/}mm^{/};\ \bar{4}^{/}2m^{/},\ \bar{4}2^{/}m^{/},$
$m^{(\underline{4}}\,1^{\underline{2})};\ m^{(\underline{6}}1^{2)},\ m^{\underline{2})}1^{(\underline{6}},\ m^{(\underline{6}}1^{\underline{2})}$	$\bar{4}^{/}2^{/}m;\ \bar{6}^{/}2m^{/},\ \bar{6}2^{/}m^{/},\ \bar{6}^{/}2^{/}m$
$m^{(\underline{4}}\,1^{3)};$	$\bar{4}^{/}3m^{/}.$

По представленной таблице 3 легко прослеживается, что отражению m от точки в группах категории G_{10}^{P} соответствует антитождественное преобразование $1^{/}$ в группах категории G_{30}^{1}, а каждая группа Р-симметрии категории G_{10}^{P} и соответствующая ей группа категории G_{30}^{1} имеют одинаковое строение.

В свою очередь, при обобщении групп G_{10} со 122 гиперкристаллографическими Р- симметриями 1-го порядка подсчет младших и Q-средних групп G_{10}^{P} этих Р-симметрий осуществим по формулам (VV): $7M_2 + M_3 + 4\,M_4 + 7\,M_6 + M_{22} + 3\,M_{2\underline{2}} + 8\,M_{2\underline{1}} + 4\,M_{32} + 4\,M_{42} + 6\,M_{\underline{4}2} + 4\,M_{62} + 12\,M_{\underline{6}2} + 6\,M_{4\underline{1}} + 7\,M_{6\underline{1}} +$
и $373\,M_2 + 20\,M_3 + 16\,M_4 + 34\,M_6 + 209\,M_{2\underline{1}} + 4\,M_{22} + 52\,M_{2\underline{2}} + 38\,M_{32} + 16\,M_{42} + 6\,M_{\underline{4}2} + 16_{62} + 30\,M_{\underline{6}2}$,

извлеченным из универсальных формул [16] подсчета младших и Q-средних групп, порождаемых группами симметрии любой категории при их обобщении с гиперкристаллографическими P-симметриями 1-го порядка.

Так как значения M_P, фигурирующие в формулах (VV), нам известны ($M_2 = 1$, а остальные $M_P = 0$), то при обобщении групп G_{10} с этими 122 P-симметриями получим 2 порождающих + 242 старших + 7 младших + 373 Q-средних – всего 624 группы G_{10}^P 122 P-симметрий, моделирующих, согласно [16], 624 группы симметрии категории G_{5410}, совпадающие с 624 группами симметрии категории G_{5430} [9].

Далее, при обобщении групп G_{10} с 624 гиперкристаллографическими P-симметриями 2-го порядка при $P \cong G_{5430}$ подсчет младших и Q-средних осуществим по формулам: $\left({}_{V}{}^{V}{}_{V}\right)$ $15 M_2 + M_3 + 8M_4 + 15M_6 + M_{22} + 7M_{2\underline{2}} + 8M_{32} + 8M_{42} + 8M_{62} + 56 M_{\underline{6}2} + 42 M_{2\underline{1}}$ и $3099 M_2 + 82M_3 + 120M_4 + 260M_6 + 15M_{22} + 3178M_{2\underline{1}} + 361M_{2\underline{2}} + 222 M_{32} + 120M_{42} + 112M_{\underline{4}2} + 120M_{62} + 378M_{\underline{6}2}$, извлеченным последовательно из универсальных формул [17] подсчета младших и Q-средних групп, выводимых из групп симметрии любой категории при их обобщении с гиперкристаллографическими P-симметриями 2-го порядка.

Ввиду известности значений M_P, фигурирующих в формулах $\left({}_{V}{}^{V}{}_{V}\right)$ для групп G_{10}^P, ($M_2 = 1$, а остальные $M_P = 0$), при обобщении групп G_{10}^P с 624 P-симметриями при $P \cong G_{5430}$ получим 2 порождающих + 1246(2×623) старших + 15 младших + 3099 Q-средних – всего 4362 группы G_{10}^P полных 624 гиперкристаллографических P-симметрий 2-го порядка, которыми изображаются 4362 группы симметрии категории G_{65410}, совпадающие с 4362 группами симметрии категории G_{65430} (ср. [19]).

6. В заключение отметим, что при P, изоморфной каждой из 263 групп G_{420}, геометрический способ классификации P-симметрий [13] приводит к 263 различным P-симметриям, которые в [18] названы бирозеточными, а розеточные группы G_{20}^P этих P симметрий использованы для описания 6-мерных групп симметрии категории G_{6420} .

Обобщим рассматриваемые нами группы симметрии категории G_{10} с 263 бирозеточными P-симметриями и полученные группы G_{10}^P используем для выявления количества 5-мерных групп симметрии категории G_{5310}.

Однако чтобы между группами G_{10}^P бирозеточных P-симметрий и группами симметрии категории G_{5310} установилось сильноизоморфное соответствие, нужно, чтобы среди бирозеточных P-симметрий не было бы различных за счет энантноморфизма. Таких P-симметрий 251 из 263 [18] .

Различные без учета энантноморфизма бирозеточные P-симетрии распределяются по 75 изоморфным классам, что дает возможность при подсчете групп G_{10}^P бирозеточных P-симметрий использовать только одну P-симметрию из каждого класса изоморфности вместо 251 P-симметрии [20].

Обобщая 2 одномерных точечных группы 1 и m с 251 бирозеточной P-симметрией, получим 1274 группы G_{10}^P, из которых 2 порождающих, 500 старших и 772 младших и Q-средних, моделирующих все различные 1274 пятимерные группы симметрии с инвариантными трехмерной плоскостью, прямой в ней и точкой на ней, то есть группы симметрии категории G_{5310}, не содержащие энантноморфных пар.

Этот результат можно проверить независимым способом с помощью точечных групп G_{310}^P розеточных P-симметрий конечных цилиндров, ибо этими группами также интерпретируются все различные 1274 группы симметрии категории G_{5310} [9].

Таким образом, в настоящей статье одномерные точечные группы G_{10} обобщены не только с хорошо изученными к настоящему времени простой и кратной антисимметриями, а также с розеточными, таблеточными, гипертаблеточными, кристаллографическими, гиперкристаллографическими, а также развиваемыми бирозеточными P-симметриями, и полученные при этом новые группы использованы для вывода и подсчета как классических, так и многомерных линейных точечных групп симметрии. В результате этих исследований удалось независимым путем подтвердить полученные ранее в [19] результаты выявления многих категорий групп симметрии. Тем самым еще раз доказана успешность применения P-симметрии к описанию новых категорий многомерных групп симметрии.

Литература:

1. Федоров Е.С. Симметрия правильных систем фигур // Зап. Минералог. общ-ва. - 1891. - Т.21. - Сер.2. - С. 1-146.
2. Schonflies A. Kristallsysteme and Kristallstruktur. - Leipzig, 1981.
3. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. - Москва: изд-во АН СССР, 1951. - 172 с.
4. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.
5. Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф. Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. - Кишинев: Штиинца, 1978. - 275 с.
6. Белов Н.В., Тархова Т.Н. О группах цветной симметрии // Кристаллография. - 1956. - Т.1. - Вып.1 - С.4-13.
7. Поли Г.С. Мозаики для групп цветной антисимметрии // Кристаллография. - 1961. - Т.6. - Вып. 1. - С.109-111.
8. Неронова Н.Н., Белов Н.В. Цветные антисимметрические мозаики // Кристаллография. - 1961. - Т.6. - Вып. 6. - С.831-839.
9. Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П. Палистрант А.Ф. Р-симметрия и ее дальнейшее развитие. – Кишинев: Штиинца, 1986. - 155 с.
10. Niggli A., Wondratshek H Eine Verallgemeinerung der Punktgruppen. 1. Die einfachen Kryptosymmetrien // Z. Kristallogr. - 1960. - Bd. - 114. - S.215-231.
11. Wittke O. The colour-symmetry groups and cryptosymmetry groups associated with 32 crystallografic point groups // Z. Kristallogr. - 1962. - Bd.117. - S.153-165.
12. Заморзаев А.М. О группах квазисимметрии (Р-симметрии) // Кристаллография. - 1967. - Т.12. - Вып.5. - С.819-825.
13. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрическая классификация Р-симметрий // ДАН СССР. - 1981. - Т.256. - № 4. - С.856-859.
14. Палистрант А.Ф. Применение трехмерных точечных групп Р-симметрии к выводу шестимерных групп симметрии // ДАН СССР - 1981. - Т.260. - № 4. - С.884-888.
15. Палистрант А.Ф. О группах розеточных, таблеточных и гипертаблеточных Р-симметрий и их связях с группами многомерных симметрий // Кристаллография. - 2000. - Т. 45. - № 6. - С.967-973.
16. Палистрант А.Ф., Попова Н.С. О группах кристаллографических и первого порядка гиперкристаллографических Р-симметрий и их геометрических приложениях // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria "Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău: USM, 2001, p. 11-18.
17. Палистрант А.Ф., Попова Н.С. О группах гиперкристаллографических Р-симметрий второго порядка и их геометрических приложениях // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria "Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău: USM, 2002, p. 201-206.
18. Заморзаев А.М. Розеточные группы бирозеточных Р-симметрий и их приложения // Современная геометрия и теория физических полей: Тезисы докладов. - Казань, 1997, с.54.
19. Палистрант А.Ф. Одномерные дискретные группы Р-симметрии и их многомерные приложения // Analele Ştiinţifice ale USM. Seria "Ştiinţe fizico-matematice" - Chişinău: USM, 2005, p. 99-107.
20. Заморзаев А.М. О сильном изоморфизме групп и изоморфизме Р-симметрий // Известия АН РМ. Математика. - 1994. - №1. - С.75-84.
21. Палистрант А.Ф. Пространственные группы (p/)-симметрии (полиевы) и их применение к выводу пятимерных кристаллографических групп симметрии // ДАН СССР. - 1980. - Т.254. - №5. - С.1126-1130.
22. Палистрант А.Ф. Одномерные линейные группы бирозеточных Р-симметрий и их многомерные приложения // Conferinţa ştiinţifică internaţională: Rezumatele comunicărilor (Ştiinţe reale). - Chişinău, 2006, p.7-8.

Prezentat la 30.08.2007