STUDIA UNIVERSITATIS

Revistă științifică a Universității de Stat din Moldova, 2007, nr.8

Посвящается 80-летию со дня рождения профессора Заморзаева А.М., члена-корреспондента АН Молдовы

МЛАДШИЕ ГЕМИСИММОРФНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГРУППЫ ТРЕХ НЕЗАВИСИМЫХ РОДОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АНТИСИММЕТРИИ, (22$\underline{1}$)-СИММЕТРИИ И (2$\underline{2}$1$'$)-СИММЕТРИИ

Александр ПАЛИСТРАНТ, Алла ШЕНЕШЕУЦКАЯ

Кафедра алгебры и геометрии

Deducerea grupurilor minore hemisimorfe spațiale de antisimetrie de multiplicitatea trei a fost obținută prin metoda Şubnikov-Zamorzaev. De asemenea, a fost stabilită legătura acestor grupuri cu grupurile minore hemisimorfe spațiale de tipurile (22$\underline{1}$) şi (2$\underline{2}$1$'$). Această legătură a dat posibilitatea de a stabili numărul tuturor grupurilor minore diferite, obținute din grupurile hemisimorfe spațiale la generalizarea lor cu grupurile de simetrie (22$\underline{1}$) şi (2$\underline{2}$1$'$).

Junior hemisimmorfic space groups of three–fold antisimmetry have been derived using Shubnikov – Zamorzaev method. The connection of these groups with junior hemisimorfic spase groups of (22$\underline{1}$)–symmetry and (2$\underline{2}$1$'$)–symmetry has been discovered. This connection permitted to establish the number of different junior groups which hemisimorfic space groups generate for (22$\underline{1}$)-symmetry and (2$\underline{2}$1$'$)-symmetry.

1. В [1] приведены результаты обобщения трехмерных симморфных пространственных федоровских групп с понятиями антисимметрии трех независимых родов, (22$\underline{1}$)-симметрии и (2$\underline{2}$1$'$)-симметрии. Настоящая статья является логическим продолжением [1] и посвящается выводу уже гемисимморфных пространственных федоровских групп указанных трех частных случаев P-симметрии.

Охарактеризуем необходимые понятия, связанные с постановкой нашей задачи. Заметим, что в самом общем случае трехмерная федоровская группа $\Phi = T \cdot (\widetilde{f})$, где T – группа, порожденная параллельными переносами на три некопланарные векторы, а $(\widetilde{f})$ – набор из преобразований симметрии $f_1, f_2, ..., f_n$, где каждое $f_i = s_i \cdot v_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, разлагается в произведение переноса s_i и "поворота" v_i. Так вот, интересующей нас гемисимморфной называется такая федоровская группа, подгруппа преобразований симметрии первого рода которой симморфная, но сама группа не симморфная, то есть набор $(\widetilde{f})$ нельзя свести к точечной группе V, так как этот набор обязательно включает или отражения от плоскостей, не проходящих через исходную точку O, или скользящие отражения. В этом случае федоровская группа $\Phi = TV_t$, где T сохраняет прежний смысл, $V_t = \{V_0, v_t\}$ – неточечная группа, а v_t – преобразование симметрии второго рода, не разлагающееся на перенос и "поворот" из группы Φ. Иначе говоря, в гемисимморфной группе Φ имеются такие преобразования $f = sm$, что по отдельности s и m не принадлежат Φ, но ее преобразования симметрии первого рода образуют симморфную группу $\Phi_0 = TV_0$ [1,2].

Из приведенного выше описания гемисимморфной группы следует, что для ее получения нужно "испортить" симморфную группу, то есть среди образующих элементов в наборе $(\widetilde{f})$ =V или превратить плоскость отражения в плоскость скользящего отражения, или параллельно сместить плоскость (или зеркально–поворотную ось) от точки O (ср. [2, 3]).

Приведем пример вывода гемисимморфных групп из симморфных, имеющих преобразования симметрии второго рода. Для этого рассмотрим, например, симморфную группу *{a,b,c}(2·m)* ортогональной сингонии, записанную в символике А.М. Заморзаева, использованной в [1] при рассмотрении симморфных пространственных федоровских групп. У этой группы ось 2 паралельна вектору $\overline{c}$, а плоскость m перпендикулярна вектору $\overline{a}$ и параллельна векторам $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Группа *{a,b,c}(2)* – подгруппа из преобразований симметрии первого рода рассматриваемой группы. Ось 2 этой подгруппы, согласно определению гемисимморфной группы, должна сохраниться при выводе гемисимморфных групп из рассматриваемой симморфной.

Итак, заменив плоскость отражения *m* в группе *{a,b,c}(2·m)* на всевозможные плоскости скользящего отражения или сместив ее параллельно (или проделав то и другое), получим следующие группы, записанные в двух символиках, в предложенной А.М. Заморзаевым и интернациональной: 1) $\{a,b,c\}\left(2\cdot\frac{c}{2}m\right)$, или Pcc2; 2) $\{a,b,c\}\left(2\cdot\frac{b}{2}m\right)$, или Pbm2 (здесь плоскость m сдвинута на вектор $\frac{\overline{b}}{4}$ от оси 2, а скольжение происходит вдоль вектора $\overline{b}$); 3) $\{a,b,c\}\left(2\cdot\frac{b+c}{2}m\right)$ или Pnc2; 2$'$) $\{a,b,c\}\left(2\cdot m_{\frac{a}{4}}\right)$ или *Pma2*, где $m_{\frac{a}{4}}$ означает, что плоскость отражения, перпендикулярная вектору $\overline{a}$, сдвинута от оси поворота на вектор $\frac{\overline{a}}{4}$, а скольжение происходит вдоль вектора $\overline{a}$; 3$'$) $\{a,b,c\}\left(2\cdot\frac{c}{2}m_{\frac{a}{4}}\right)$, или Pcn2; 4) $\{a,b,c\}\left(2\cdot\frac{b}{2}m_{\frac{a}{4}}\right)$, или *Pba*2 (в этом случае обе плоскости отражения стали плоскостями скользящего отражения и обе сдвинуты); 5) $\{a,b,c\}\left(2\cdot\frac{b+c}{2}m_{\frac{a}{4}}\right)$, или Pnn2 (в этом случае обе плоскости отражения стали плоскостями скользящего отражения $\frac{a+c}{2}m$ и $\frac{b+c}{2}m$ и обе сдвинуты).

Среди полученных гемисимморфных федоровских групп имеются одинаковые группы: 2) и 2$'$), а также 3) и 3$'$) попарно одинаковы в силу равноправия векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Таким образом, из рассматриваемой симморфной группы *{a,b,c}(2·m)* выводится только 5 различных гемисимморфных. “Испортив” аналогичным образом все симморфные федоровские группы, имеющие преобразования симметрии второго рода, можно убедиться, что всего имеется 54 гемисимморфных группы [2, 3].

Все эти группы вместе с симморфными полностью выписаны в приложении П1 монографии [3] в трех символиках: использованной Е.С. Федоровым, предложенной А.М. Заморзаевым и интернациональной.

В настоящей статье нас будут интересовать только гемисимморфные пространственные федоровские группы, представленные в заморзаевской символике, явно отражающей полную систему образующих элементов рассматриваемых групп и удобной для применения метода Шубникова – Заморзаева к обобщению пространственных федоровских групп с понятиями антисимметрии трех независимых родов, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии (ср. [1]). В этой символике буквами *a, b, c* обозначены векторы переносов – ребра параллелепипеда Бравэ. Символ группы переносов T выражается через образующие. Так, символ *{a,b,c}* соответствует решетке P, $\left\{a,\frac{a+b}{2},c\right\}$ (или $\left\{a,b,\frac{a+c}{2}\right\}$) – решетке C (или B, или A, если менять ролями векторы *a, b, c*), $\left\{a,b,\frac{a+b+c}{2}\right\}$ – решетке I, $\left\{a,\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2}\right\}$ – решетке F. В символе для гемисимморфной группы, как и для симморфной, Ф = T·G первый множитель означает группу T, а второй в круглых скобках – символ группы G. Оси поворотов и зеркальных поворотов, плоскости отражений и их взаимная ориентация по отношению к векторам переносов в группе T точно такая же, как и в симморфных группах [1,3]. Символом $\frac{d}{2}m$ обозначается плоскость скользящего отражения с вектором скольжения $\frac{\overline{d}}{2}$, где $\overline{d}$ – вектор основного переноса (в конкретных случаях $\overline{d}$ может равняться $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{c}$, $\overline{b}+\overline{c}$ – в зависимости от решетки). Прохождение любой плоскости через ось или параллельность ей отмечаются точкой между их символами, перпендикулярность – двоеточием. Индекс $\frac{d}{4}$ справа внизу символа плоскости (отражения или скользящего отражения) или зеркально-поворотной оси характеризует ее смещенность на расстояние $\frac{d}{4}$ от точки пересечения других выбранных осей симметрии [3].

2. Охарактеризуем далее понятия антисимметрии трех независимых родов, ($22\underline{1}$)-симметрии и ($2\underline{2}1'$)-симметрии и укажем взаимозависимость между ними.

Нужная нам антисимметрия трех независимых родов задается группой 8-го порядка $E^{(3)} = \{\underline{1}\}\times\{1'\}\times\{{}^*1\}$, разлагающейся в прямое произведение трех групп второго порядка, порожденных последовательно антитождественным преобразованием $\underline{1}$ рода 1, антитождественным преобразованием $1'$ рода 2 и антитождественным преобразованием ^{*1} рода 3, появляющимся в случае, когда каждой точке фигуры приписывается три качественно различных знака “+” или “–” с целью получения трехкратных заморзаевских групп [1, 3].

В свою очередь, символом $22\underline{1}$ в интернациональной символике обозначена старшая осевая группа, порожденная точечной группой симметрии 222, образующие элементы которой являются поворотами вокруг трех попарно ортогональных осей 2-го порядка, и задает одну из 32 кристаллографических Р-симметрий в случае, когда группа подстановок индексов Р, приписанных точкам преобразуемой фигуры, изоморфна одной из трехмерных точечных групп симметрии G_{30} [1, 4]. Группа $22\underline{1}$ интерпретирует группу mmm, порождаемую отражениями от трех попарно ортогональных между собой плоскостей, если входящее в группу $22\underline{1}$ в качестве самостоятельного образующего элемента антитождественное преобразование $\underline{1}$ истолковывать в качестве зеркального поворота $\widetilde{2}$ второго порядка, что возможно [5].

Наконец, сокращенным символом $2\underline{2}1'$ обозначена старшая рода 2 и младшая рода 1 группа, порожденная группой 222 четвертого порядка при ее обобщении с двукратной антисимметрией [3]. Но группа $2\underline{2}1'$ может быть представлена полным символом $2\underline{2}\ \underline{2}1'$, если воспользоваться всеми образующими элементами группы $2\underline{2}1'$, и мы приходим к тому, что группа $2\underline{2}\ \underline{2}1'$ моделирует младшую группу антисимметрии m$\underline{\text{m}}$ $\underline{\text{m}}$, порожденную группой mmm, если содержащееся в группе $2\underline{2}\underline{2}1'$ в качестве самостоятельного образующего элемента антитождественное преобразование $1'$ рода 2 истолковывать как зеркальный поворот $\widetilde{2}$ второго порядка. Отсюда следует, что группа m$\underline{\text{m}}$ $\underline{\text{m}}$ изоморфна группе mmm как своей порождающей [3].

Аналогичным образом группа $22\underline{1}$, задающая одну из 32 кристаллографических Р-симметрий, изоморфна группе $2\underline{2}1'$, характеризующей одну из 122 гиперкристаллографических Р-симметрий при $P \cong G_{430}$, где символом $\cong$ обозначен сам изоморфизм [4] . Покажем это. Группа $22\underline{1} = 2_1 2_2 2_3\ \underline{1} =$ $= (e, 2_1, 2_2\ , 2_3, \underline{e}\ , \underline{2}_1\ , \underline{2}_2, \underline{2}_3)$ восьмого порядка, а группа $2\underline{2}1' = 2_1\underline{2}_2\underline{2}_3 1' = (\text{e}, 2_1\ \underline{2}_2, \underline{2}_3, e', 2'_1, \underline{2}'_2, \underline{2}'_3)$ того же порядка. Рассмотрим отображение φ, переводящее элементы группы $22\underline{1}$ в элементы группы $2\underline{2}1'$ по закону $\varphi(e) = e$, $\varphi(2_1) = 2_1$, $\varphi(2_2) = \underline{2}_2$, $\varphi(2_3) = \underline{2}_3$, $\varphi(\underline{e}) = e'$, $\varphi(\underline{2}_1) = 2'_1$, $\varphi(\underline{2}_2) = \underline{2}'_2$, а $\varphi(\underline{2}_3) = \underline{2}'_3$. Это отображение является не только взаимно однозначным, но и сохраняющим операцию умножения элементов рассматриваемых групп. Действительно, взаимная однозначность между элементами рассматриваемых групп видна из самого закона отображения φ элементов группы $22\underline{1}$ на элементы группы $2\underline{2}1'$, но при этом отображении сохраняется также и операция умножения элементов рассматриваемых групп, так как, например, $\varphi(2_1 \cdot 2_2) = \varphi(2_3) = \underline{2}_3 = 2_1 \cdot \underline{2}_2 = \varphi(2_1) \cdot \varphi(2_2)$, где заключенные в круглые скобки элементы принадлежат группе $22\underline{1}$, а не заключенные в такие скобки элементы e, 2_1, $\underline{2}_2$, $\underline{2}_3$, e', $\underline{2}'_1$, $\underline{2}'_2$ и $\underline{2}'_3$ принадлежат группе $2\underline{2}1'$. Таким образом, оба требования существования изоморфизма между группами $22\underline{1}$ и $2\underline{2}1'$ выполняются [6].

В свою очередь, группа $E^{(3)}$, характеризующая антисимметрию трех независимых родов, изоморфна группе mmm, интерпретирующей группу $22\underline{1}$, задающую ($22\underline{1}$)-симметрию.

В самом деле, группа $E^{(3)} = (1, \underline{1}\ , 1'\ , {}^*1, \underline{1}'\ , {}^*\underline{1}, {}^*1', {}^*\underline{1}')$, содержащая антитождественные преобразования семи различных родов, из которых три независимых, имеет порядок 8 [3]. Группа симметрии прямоугольного параллелепипеда $mmm = m_1m_2m_3 = (e, m_1, m_2, m_3, m_1 m_2 = 2_{12}, m_1 m_3 = 2_{13}, m_2 m_3 = 2_{23}, m_1 m_2 m_3 = i_{123})$ того же порядка. Нетрудно заметить, что отображение ψ элементов группы $E^{(3)}$ на элементы группы mmm по закону $\psi(1) = e$, $\psi(\underline{1}) = m_1$, $\psi(1') = m_2$, $\psi({}^*1) = m_3$, $\psi(\underline{1}') = 2_{12}$, $\psi({}^*\underline{1}) = 2_{13}$, $\psi({}^*1') = 2_{23}$, $\psi({}^*\underline{1}') = i_{123}$ является не только взаимно однозначным, но и сохраняющим операцию умножения элементов отображающихся друг на друга групп.

Таким образом, группы $E^{(3)}$, $22\underline{1}$ и $2\underline{2}1'$, соответствующие последовательно антисимметрии трех независимых родов, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии, изоморфны между собой.

3. Приступим к выявлению путей решения поставленной задачи, то есть задачи получения младших гемисимморфных пространственных групп трех независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Что касается задачи расширения гемисимморфных пространственных групп симметрии до анналогичных младших групп антисимметрии трех независимых родов, то она непосредственно вытекает из подробно описанной в [3] теории групп симметрии и различного рода антисимметрии, когда каждой точке пространства приписывается три качественно различных знака "+" или "–". Согласно этой теории, для получения младших гемисимморфных пространственных групп антисимметрии семи различных родов, из которых три независимых, без антитождественных преобразований каких-либо родов, нужно в каждой гемисимморфной группе симметрии, записанной в символике А.М. Заморзаева, отражающей полную систему ее образующих элементов, три или большее число ее образующих заменить на соответствующие преобразования антисимметрии, среди которых обязательно должно быть три независимых. Если из полученных таким образом различных групп отобрать только те, которые изоморфны взятой гемисимморфной (порождающей по [3]) группе, то они будут подходящими для нас группами (ср. [1, 3]).

Выявленные изоморфизмы между группами $E^{(3)}$, $22\underline{1}$ и $2\underline{2}1'$ позволяют использовать младшие гемисимморфные пространственные группы трехкратной антисимметрии (группы типа M^3 по [3]) для вывода и подсчета аналогичных младших пространственных групп $(2\underline{2}1')$- симметрии, ввиду того, что по изоморфизму, обозначим его буквой δ, между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$, переводящему элементы этих групп по закону $\delta(1) = 1$, $\delta(\underline{1}) = \underline{2}_1$, $\delta(1') = \underline{2}_2$, $\delta({}^*1) = \underline{2}_3$, $\delta = (\underline{1}') = 2_3$, $\delta({}^*\underline{1}) = 2_2$, $\delta({}^*1') = 2_1$, $\delta({}^*\underline{1}') = \underline{e}$, а также по изоморфизму, обозначим его буквой γ, между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$, переводящему элементы этих групп друг в друга по закону $\gamma(1) = e$, $\gamma(\underline{1}) = \underline{2}_2$, $\gamma(1') = \underline{2}_3$, $\gamma({}^*1) = 2'_1$, $\gamma(\underline{1}') = 2_1$, $\gamma({}^*\underline{1}) = \underline{2}'_3$, $\gamma({}^*1') = \underline{2}'_2$, $\gamma({}^*\underline{1}') = e'$, каждой младшей гемисимморфной группе типа M^3 будет соответствовать такая же группа $(22\underline{1})$-симметрии и $(22\underline{1}')$-симметрии. Но при этом различным младшим гемисимморфным группам, получающимся из одной младшей гемисимморфной группы типа M^3 нетождественными подстановками знаков _ , ′ , * , то есть преобразований антисимметрии рода 1, рода 2 и рода 3, будут соответствовать по изоморфизму δ одинаковые группы $(22\underline{1})$-симметрии, а по изоморфизму γ – одинаковые группы $(2\underline{2}1')$-симметрии, ибо критерии неодинаковости исследуемых нами групп трех частных случаев P-симметрии разные (ср. [1]).

Действительно, группа $E^{(3)} = (e, \underline{1}, 1', {}^*1, \underline{1}', {}^*\underline{1}, {}^*1', {}^*\underline{1}')$ характеризуется восемью различными между собой элементами, из которых семь являются антитождественными преобразованиями различных родов, соответствующих трем независимым родам антитождественных преобразований [3], в группе $22\underline{1} = 2_1\, 2_2\, 2_3\, \underline{1} = (e, 2_1, 2_2, 2_3, \underline{e}, \underline{2}_1, \underline{2}_2, \underline{2}_3)$ существенно различаются между собой только четыре элемента, например, e, 2_1, $\underline{e}$, $\underline{2}_1$, а элементы 2_1, 2_2, 2_3 одинаковы между собой, как и элементы $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$, $\underline{2}_3$ с точки зрения $(22\underline{1})$- симметрии, а в группе $2\underline{2}1' = 2\underline{2}\,\underline{2}1' = 2_1\, \underline{2}_2\, \underline{2}_3 1' = (e, 2_1, \underline{2}_2, \underline{2}_3, e', 2'_1, \underline{2}'_2, \underline{2}'_3)$ существенно различны между собой только шесть элементов, например, e, 2_1, $\underline{2}_2$, e', $2'_2$ и $\underline{2}'_2$, а элементы $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ одинаковы между собой, как и элементы $\underline{2}'_2$ и $\underline{2}'_3$ с точки зрения $(2\underline{2}1')$-симметрии (ср. [1]).

Чтобы ипользовать младшие гемисимморфные пространственные группы типа M^3 для вывода и подсчета аналогичных младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии, нужно группы типа M^3, выводимые из каждой гемисимморфной федоровской группы, расписать по представителям шестерок, троек, двоек и одиночек при условии, что остальные группы этого списка получаются из выписанного представителя либо всеми нетождественными подстановками элементарных знаков _, ′, и *, либо круговыми подстановками этих знаков, либо транспозицией черты и звездочки, либо остальных групп нет (ср. [1]). При этом шестерке групп одинакового строения типа M^3, связанных между собой отмеченной зависимостью, будет соответствовать одна младшая группа ($22\underline{1}$)-симметрии, в связи с тем, что преобразованиям антисимметрии, определяемым антитождественными преобразованиями рода 1, рода 2 и рода 3, в группах типа M^3 указанной шестерки по изоморфизму δ будут соответствовать преобразования, связанные с неразличимыми элементами $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе ($22\underline{1}$)-симметрии. По аналогичной причине трем и двум младшим группам типа M^3, связанным между собой указанной зависимостью, по изоморфизму δ между группами $E^{(3)}$ и ($22\underline{1}$) будут соответствовать последовательно по одной младшей группе ($22\underline{1}$)-симметрии, а одиночной группе типа M^3 по тому же изоморфизму δ будет соответствовать одна младшая группа ($22\underline{1}$)-симметрии. Далее, аналогичной шестерке гемисимморфных групп типа M^3 будут соответствовать три различных младших гемисимморфных группы ($2\underline{2}1^{/}$)-симметрии, ввиду того, что по изоморфизму γ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1^{/}$, преобразованиям антисимметрии, связанными с антитождественными преобразованиями рода 1, рода 2 и рода 3, будут соответствовать в группах ($2\underline{2}1^{/}$)-симметрии преобразования, связанные с элементами $\underline{2}_2$, $\underline{2}_3$ и $2^{/}_1$, среди которых $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ одинаковые между собой, а элемент $2^{/}_1$ отличен от элементов $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе $2\underline{2}1^{/}$; подобным же образом трем различным младшим гемисимморфным группам типа M^3 , получаемым из одной такой же группы круговыми подстановками знаков - , $^{/}$, и * между группами E^3 и $2\underline{2}1^{/}$, будут соответствовать две различных гемисимморфных группы ($2\underline{2}1^{/}$)-симметрии, а двум различным гемисимморфным группам типа M^3, переходящим друг в друга при транспозиции знаков – и *, будут соответствовать две различных гемисимморфных группы ($2\underline{2}1^{/}$)-симметрии, а одиночной гемисимморфной группе трех независимых родов преобразований антисимметрии будет соответствовать по тому же изоморфизму γ одна аналогичная младшая группа ($2\underline{2}1^{/}$)- симметрии (ср.[1]).

Подкрепим приведенные выше утверждения примерами. Рассмотрим младшую трех независимых родов преобразований антисимметрии гемисимморфную группу $\{\underline{a},b,c\}\left(2^{/}\cdot\frac{c}{2}\,{}^{*}m\right)$ и пять отличных от нее и различных между собой групп, полученных из выписанной группы всеми нетождественными подстановками знаков _ , $^{/}$, *, то есть преобразованиями антисимметрии рода 1, рода 2 и рода 3. Это будут следующие группы $\{\underline{a}\ \ b,c\}\left({}^{*}2\cdot\frac{c}{2}m^{/}\right)$, $\{a^{/},b,c\}\left(\underline{2}\cdot\frac{c}{2}\,{}^{*}m\right)$, $\{a^{/},\ b,\ c\}\left({}^{*}2\cdot\frac{c}{2}\,\underline{m}\right)$, $\{{}^{*}a,b,c\}\left(\underline{2}\cdot\frac{c}{2}\,m^{/}\right)$ и $\{{}^{*}a,b,c\}\left(2^{/}\cdot\frac{c}{2}\,\underline{m}\right)$. Этим шести группам в порядке их записи по изоморфизму δ между группами $E^{(3)}$, задающей антсимметрию трех независимых родов, и группой $22\underline{1}$, задающей ($22\underline{1}$)-симметрию, будут соответствовать следующие шесть младших гемисимморфных групп ($22\underline{1}$)-симметрии:

1) $\{a^{(\underline{2}_1)},\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$; 2) $\{a^{(\underline{2}_1)},\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$; 3) $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_1)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$;

4) $\{a^{(\underline{2}_2)}\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$; 5) $\{a^{(\underline{2}_3)}\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_1)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$; 6) $a^{(\underline{2})},\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_1)})$, которые неразличимы между собой ввиду того, что преобразования $a^{(\underline{2}_1)}$, $a^{(\underline{2}_2)}$, $a^{(\underline{2}_3)}$, как и преобразования $2^{(\underline{2}_1)}$, $2^{(\underline{2}_2)}$, $2^{(\underline{2}_3)}$, а также $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_1)}$, $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)}$, $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_3)}$, одинаковы между собой вследствие того, что элементы $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$, и $\underline{2}_3$, геометрически совпадают в группе $22\underline{1}$.

Этим же шести младшим группам трех независимых родов преобразований антисимметрии по изоморфизму γ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1^{/}$ будут соответствовать в порядке записи следующие шесть младших гемисимморфных групп ($2\underline{2}1^{/}$)-симметрии:

1) $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b,\ c\}(2^{(\underline{2}_3)}\cdot\frac{c}{2}\ m^{(2'1)})$; 2) $\{a^{(\underline{2}_2)},\ b,\ c\}(\ 2^{(\underline{2}'_1)}\cdot\frac{c}{2}\ m^{(\underline{2}_3)})$; 3) $\{a^{(\underline{2}_3)},\ b,\ c\}(\ 2^{(\underline{2}_2)}\cdot\frac{c}{2}\ m^{(\underline{2}'_1)})$;

4) $\{a^{(\underline{2}_3)}\ b,\ c\}(2^{(2'_1)}\cdot\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$; 5) $\{a^{(2'_1)}b,\ c\}(\ 2^{(\underline{2}_2)}\frac{c}{2}\ \mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$; 6) $a^{(2'_1)}b,\ c\}(\ 2^{(\underline{2}_3)}\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$,

из которых 1) и 3), 2) и 4), 5) и 6) совпадают между собой ввиду того, что преобразования $a^{(\underline{2}_2)}$ и $a^{(\underline{2}_3)}$, как и преобразования $2^{(\underline{2}_2)}$ и $2^{(\underline{2}_3)}$, а также $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)}$ и $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_3)}$, не различаются в отмеченных группах из-за того, что элементы $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе $2\underline{2}1^{/}$ играют одинаковую геометрическую роль.

Аналогичным образом трем различным младшим гемисимморфным группам 1) $\{\underline{a}, {}^{*}b, c\}({}^{*}2 \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{/})$; 2) $\{{}^{*}a, b^{/}, c\}(2^{/} \cdot \frac{c}{2}\, \underline{\mathrm{m}})$; 3) $\{a^{/}, \underline{b}, c\}(\underline{2} \cdot \frac{c}{2}\, {}^{*}\mathrm{m})$, полученным из группы 1) круговыми подстановками знаков _ , $^{/}$, *, по изоморфизму δ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать совпадающие между собой следующие три младших гемисимморфных группы $(22\underline{1})$-симметрии: 1) $\{a^{(\underline{2}_1)}, b^{(\underline{2}_3)}, c\}(2^{(\underline{2}_3)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$; 2) $\{a^{(\underline{2}_3)}, b^{(\underline{2}_2)}, c\}\ (2^{(\underline{2}_2)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_1)})$; 3) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b^{(\underline{2}_1)}, c\}\ (2^{(\underline{2}_1)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$, ввиду одинаковой геометрической роли элементов $\underline{2}_1$, $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ в группе $22\underline{1}$.

В свою очередь, этим же трем младшим семи различных родов преобразований антисимметрии гемисимморфным группам по изоморфизму γ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1^{/}$ будут соответствовать в порядке их записи следующие младшие гемисимморфные группы $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии: 1) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b^{(2'_1)}, c\}(2^{(2'_1)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$; 2) $\{a^{(2'_1)}, b^{(\underline{2}_3)}, c\}(2^{(\underline{2}_3)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$; 3) $\{a^{(\underline{2}_3)}, b^{(\underline{2}_2)}, c\}(2^{(\underline{2}_2)} \cdot \frac{c}{2}\mathrm{m}^{(2'_1)})$,

из которых 1) и 2) одинаковы между собой, ввиду того, что группа $\{a^{(2'_1)}, b^{(\underline{2}_3)}, c\}(2^{(\underline{2}_3)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)}) =$

$= \{a^{(2'_1)}, b^{(\underline{2}_3)}, c\}(2 \cdot \frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$ под влиянием вектора $\mathrm{b}^{(\underline{2}_3)}$, перпендикулярного оси $2^{(\underline{2}_3)}$. Далее, группа

$\{a^{(2'_1)}, b^{(\underline{2}_3)}, c\}(2 \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)}) = \{a^{(2'_1)}, b^{(\underline{2}_3)}, c\}(2^{(2'_1)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}'_3)}) \cong \{a^{(\underline{2}'_3)}, \mathrm{b}^{(2'_1)}, \mathrm{c}\}(2^{(2'_1)} \cdot \frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$, если

векторы $\mathrm{a}^{(2'_1)}$ и $\mathrm{b}^{(\underline{2}_3)}$ поменять друг на друга, а плоскость скользящего отражения $\frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}'_3)}$ заменить на

плоскость скользящего отражения $\frac{c}{2}\, \mathrm{m}^{(\underline{2}_2)}$. Полученная группа $\{\mathrm{a}^{(\underline{2}_3)}, \mathrm{b}^{(2'_1)}, \mathrm{c}\}(2^{(2'_1)} \cdot \frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$ одинакова

с группой 1), ибо преобразования $a^{(\underline{2}_2)}$ и $a^{(\underline{2}_3)}$, как и преобразования $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_3)}$ и $\frac{c}{2}\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)}$, попарно совпадают, так как элементы $\underline{2}_2$ и $\underline{2}_3$ имеют одинаковый геометрический смысл в группе $2\underline{2}1^{/}$ и т.д.

Из всего сказанного в этом пункте вытекает, что для решения поставленной задачи выявленным способом нужно осуществить вывод младших гемисимморфных пространственных групп G_3^P типа M^3 и каждое семейство полученных групп распределить по представителям шести, трех, двух и одной группы, связанным между собой отмеченной зависимостью, и полученный сокращенный обзор новых групп использовать для записи и подсчета всех различных младших гемисимморфных групп $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии (ср. [1]).

Найденные в [7] с помощью компьютера по семействам числа младших гемисимморфных групп типа M^3, порождаемых федоровскими группами G_3, не могут быть использованы для подсчета различных младших гемисимморфных групп $(22\underline{1})$- и $(2\underline{2}1^{/})$- симметрии, вследствие того, что в [7] не представлено их распределение по представителям шестерок, троек, двоек и одиночек групп с указанной зависимостью, а могут служить только ориентиром правильности распределения самих полученных младших гемисимморфных групп типа M^3 по отмеченным представителям.

В настоящей статье приводится независимый от работы [7] способ вывода младших гемисимморфных пространственных групп типа M^3 по представителям, заменяющим шесть, три, две, либо одну группу. Причем, недостающие пять групп будут получаться из выписанного представителя шести групп всеми подстановками знаков _, $^{/}$ и *, последовательно характеризующими преобразования антисимметрии рода 1, рода 2 и рода 3. Далее, недостающие 2 группы будут получаться из представителя, заменяющего три группы, только круговыми перестановками знаков _ , $'$, *, а недостающая одна группа будет получаться из представителя двух групп только транспозицией знаков _ и *. Наконец, из представителя одной группы подстановками знаков _, $'$, * будут получаться только одинаковые с ней группы.

4. Расширим гемисимморфные пространственные группы симметрии G_3 выявленным в П.3 методом до младших групп трех независимых родов преобразований антисимметрии, а затем полученные группы используем для записи и подсчета младших гемисимморфных групп ($22\underline{1}$)- и ($2\underline{2}1'$)-симметрии. Чтобы из классических гемисимморфных групп используемым методом Шубникова–Заморзаева получались только нужные нам младшие группы преобразований антисимметрии трех независимых родов, будем учитывать изложенные на стр. 43-50 работы [3] особенности этих групп, связанные с правилами замены образующих элементов гемисимморфных групп G_3 на соответствующие преобразования антисимметрии. Такие группы выводятся не из всех гемисимморфных групп G_3, а только из таких, которые содержат в системе своих образующих элементов q преобразований симметрии, где $q \geq 3$, позволяющих заменять их на соответствующие преобразования антисимметрии трех или большего числа родов, среди которых обязательно должно быть три независимых рода преобразований антисимметрии – метод Шубникова–Заморзаева вывода групп типа M^3 из классических групп симметрии, представленных в символике, отражающей их полную систему образующих элементов [3].

Пространственные гемисимморфные группы G_3, удовлетворяющие таким требованиям, распределены в [3, 7] на 14 множеств, каждое из которых включает в себя только такие группы симметрии, которые порождают одинаковое число младших групп типа M^3 при их обобщении с трехкратной антисимметрией (группы с одинаковыми антисимметрическими характеристиками (АХ) по [7]). Выпишем эти множества групп в федоровских обозначениях: 1) 1h, 33h (2 группы); 2) 4h, 7h, 9h, 10h, 15h, 25h, 29h, 30h, 31h, 32h, 34h (всего 11 групп); 3) 24h (одна группа); 4) 17h (одна группа); 5) 6h, 11h, 20h, 23h, 35h, 36h (всего 6 групп); 6) 22h (одна группа); 7) 12h, 13h, 14h, 26h, 28h, 37h, 48h (всего 7 групп); 8) 18h (одна группа); 9) 38h (одна группа); 10) 3h (одна группа); 11) 5h (одна группа); 12) 8h (одна группа); 13) 19h (одна группа); 14) 21h (одна группа) – всего 36 гемисимморфных пространственных групп из всех 54 порождают нужные нам младшие группы [3,7].

Итак, группа с федоровским символом 1h и заморзаевским $\{a,b,c\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m})$ порождает 42 группы типа M^3. Список этих групп при использовании отмеченных сокращенных методов их записи выглядит следующим образом:

1) $\{\underline{a}, b, c'\}(\frac{b}{2}\,{}^{*}\mathrm{m}) - 6$;
2) $\{\underline{a}, b, c'\}(\frac{b}{2}\,{}^{*}\mathrm{m}') - 6$;
3) $\{\underline{a}, b, {}^{*}c'\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}') - 6$;
4) $\{\underline{a}', b, \underline{c}\}(\frac{b}{2}\,{}^{*}\mathrm{m}) - 3$;
5) $\{\underline{a}', b, \underline{c}\}(\frac{b}{2}\,{}^{*}\underline{\mathrm{m}}) - 3$;
6) $\{\underline{a}', b, {}^{*}\underline{c}\}(\frac{b}{2}\,\underline{\mathrm{m}}) - 3$;
7) $\{\underline{\mathrm{a}}', \mathrm{b}, {}^{*}\underline{\mathrm{c}}\}(\frac{b}{2}\,{}^{*}\mathrm{m}) - 3$
8) $\{{}^{*}a', b, \underline{c}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}') - 3$
9) $\{{}^{*}a', b, \underline{c}\}(\frac{b}{2}\,\underline{\mathrm{m}}') - 3$
10) $\{{}^{*}\underline{a}', b, \underline{c}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}') - 6$.

Этим 42 группам по изоморфизму δ между группами $E^{(3)}$ и $22\underline{1}$ будут соответствовать $4\times1+6\times1 = 10$ младших гемисимморфных групп ($22\underline{1}$)-симметрии, а по изоморфизму γ между группами $E^{(3)}$ и $2\underline{2}1'$ $4 \times 3 + 6 \times 2 = 24$ младших гемисимморфных группы ($2\underline{2}1'$)-симметрии.

Список этих 10 младших групп ($22\underline{1}$)-симметрии с порождающей группой 1h выглядит следующим образом: 1) $\{a^{(\underline{2}_1)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$, 2) $\{a^{(\underline{2}_1)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(2_1)})$, 3) $\{a^{(\underline{2}_1)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(2_1)}\} \times (\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$, 4) $\{a^{(2_3)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_1)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$, 5) $\{a^{(2_3)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_1)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(2_2)})$, 6) $\{a^{(2_3)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(2_2)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_1)})$, 7) $\{a^{(2_3)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(2_2)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_3)})$, 8) $\{a^{(2_1)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_1)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$, 9) $\{a^{(2_1)}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_1)}\}(\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(2_3)})$, 10) $\{a^{(\underline{e})}, \mathrm{b}, \mathrm{c}^{(\underline{2}_1)}\} \times (\frac{b}{2}\,\mathrm{m}^{(\underline{2}_2)})$.

В свою очередь, список 24 младших групп $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии с порождающей группой 1h выглядит так: 1) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b, c^{(\underline{2}_3)}\}(\frac{b}{2}m^{(2'_1)})$, 2) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b, c^{(2'_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)})$, 3) $\{a^{(2'_1)}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)})$; 4) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b, c^{(\underline{2}_3)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}'_2)})$, 5) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b, c^{(2'_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}'_2)})$, 6) $\{a^{(2'_1)}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(2_1)})$; 7) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b, c^{(\underline{2}'_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)})$, 8) $\{a^{(\underline{2}_2)}, b, c^{(\underline{2}'_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(2'_1)})$, 9) $\{a^{(2'_1)}, b, c^{(2_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)})$; 10) $\{a^{(2_1)}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(2'_1)})$, 11) $\{a^{(\underline{2}'_2)}, b, c^{(\underline{2}_3)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)})$; 12) $\{a^{(2_1)}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}'_3)})$, 13) $\{a^{(\underline{2}'_2)}, b, c^{(\underline{2}_3}\}(\frac{b}{2}m^{(2_1)})$; 14) $\{a^{(2_1)}, b, c^{(\underline{2}'_3)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)})$, 15) $\{a^{(\underline{2}'_2)}, b, c^{(2_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)})$; 16) $\{a^{(2_1)}, b, c^{(\underline{2}'_3)}\}(\frac{b}{2}m^{(2'_1)})$, 17) $\{a^{(\underline{2}'_2)}, b, c^{(2_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)})$; 18) $\{a^{(\underline{2}'_2)}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)})$; 19) $\{a^{(2_1)}, b, c^{(2'_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)})$; 20) $\{a^{(\underline{2}'_2)}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(2_1)})$, 21) $\{a^{(2_1)}, b, c^{(2'_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}'_3)})$; 22) $\{a^{(e')}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_3)})$, 23) $\{a^{(e')}, b, c^{(\underline{2}_2)}\}(\frac{b}{2}m^{(2'_1)})$, 24) $\{a^{(e')}, b, c^{(2'_1)}\}(\frac{b}{2}m^{(\underline{2}_2)})$.

Из-за громоздкости не станем приводить список младших групп трех независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$- и $(22\underline{1}^{/})$-симметрии, порождаемых группой 33h, а укажем только общее количество младших гемисимморфных групп отмеченных P- симметрий, порождаемых двумя группами множества 1). Эти числа таковы: 42×2 = 84 младших группы типа M^3, 10×2 =20 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 24×2 = 48 младших групп $(22\underline{1}^{/})$-симметрии.

Далее, группа 4h – $\{a, b, \frac{a+c}{2}\}(2{:}\frac{b}{2}m)$, входящая в множество 2) из 11 гемисимморфных групп с одинаковыми АХ, порождает 12×6 + 4×3 = 84 группы типа M^3, 12×1 + 4×1=16 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 12×3 + 4×2 = 44 группы $(22\underline{1}^{/})$-симметрии, а все множество из 11 групп G_3 порождает 84 ×11 = 924 группы типа M^3, 16×11 = 176 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 44×11 = 484 группы $(22\underline{1}^{/})$-симметрии.

Одна группа 24h-$\{a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}\}(2\cdot\frac{b+c}{4}m_{\frac{a}{8}}{:}2)$, образующая множество 3), порождает 95×6 + + 61×3 + 3×1 = 756 групп типа M^3, 95×1 + 61×1 + 3×1 = 159 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 95×3 + 61×2 + + 3×1 = 410 групп $(22\underline{1}^{/})$-симметрии.

Одна группа 17h – $\{a, b, c\}(2\cdot\frac{c}{2}m : 2)$, составляющая множество 4), порождает 602×6 + 112×3 = = 3948 групп типа M^3, 602×1 + 112×1 = 714 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 602×3 + 112×2 = 2030 групп $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии.

Группа 6h–$\{a, b, c\}(2\cdot\frac{b}{2}m)$, входящая в множество 5), содержащее 6 гемисимморфных групп G_3 с одинаковыми АХ, порождает 212×6 + 24×3 = 1344 группы типа M^3, 212×1+ 24×1 = 236 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 212×3 + 24×2 = 684 группы $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии, а все множество 5) порождает 1344 × 6 = 8064 группы типа M^3, 236×6 = 1416 групп $(22\underline{1})$-симметрии и 684 × 6 = 4104 группы $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии.

Одна группа 22h-$\{a, \frac{a+b}{2}, c\}(2\cdot\frac{b+c}{2}m{:}\ 2)$, составляющая множество 6), порождает 204×6+12×3 = = 1260 групп типа M^3, 204×1 + 12×1 = 216 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 204×3 + 12×2 = 636 младших групп $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии.

Группа 12h-$\{a, b, \frac{a+c}{2}\}(2\cdot\frac{b}{2}m)$, входящая в множество 7), содержащее 7 гемисимморфных групп с одинаковыми АХ, порождает 28×6 = 168 групп типа M^3, 28×1 = 28 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 28×3 = 84 младших групп $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии, а все множество 7) порождает 168×7 = 1176 групп типа M^3, 28×7 = 196 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 84×7 = 588 младших групп $(2\underline{2}1^{/})$-симметрии.

Одна группа 18h – {a,b,c}(2 · $\frac{b+c}{2}$ m : 2), задающая множество 8), порождает 104×6 + 30×3 = 714 групп типа M^3, 104×1 + 30×1 = 134 младших группы $(22\underline{1})$-симметрии и 104×3 + 30×2 = 372 младшие группы $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Одна группа 38h–{*a*, b, $\frac{a+b+c}{2}$} (4 · $\frac{c}{2}$ m : 2), задающая множество 9), порождает 702×6 + 69×3 + + 1×2 + 3×1 = 4424 группы типа M^3, 702×1 + 69×1 + 1×1 + 3×1 = 775 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 702×3 + 69×2 + 1×2 + 3×1 = 2249 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Одна группа 3h –{*a*,b,c}{2:$\frac{b}{2}$ m}, составляющая множество 10), порождает 52×6 + 36×3 = 420 групп типа M^3, 52×1 + 36×1 = 88 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 52×3 + 36×2 = 228 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Одна группа 5h –{*a*, b, c}(2·$\frac{c}{2}$ m), составляющая множество 11), порождает 49×6 + 21×3 = 357 групп типа M^3, 49×1 + 21×1 = 70 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 49×3 + 21×2 = 189 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Далее, одна группа 8h–{*a*, b, c}(2 · $\frac{b+c}{2} m_{\frac{a}{4}}$), входящая в множество 12), порождает 1×6 + 5×3 = 21 группу типа M^3, 1×1 + 5×1 = 6 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 1×3 + 5×2 = 13 групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

В свою очередь, одна группа 19h – {*a*, b, c}(2 · $\frac{b+c}{2} m_{\frac{a}{4}}$: 2), образующая множество 13), порождает 8×6 + 16×3 + 2×1 = 98 групп типа M^3, 8×1 + 16×1 + 2×1 = 26 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 8×3 + + 16×2 + 2×1 = 58 групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Наконец, одна группа 21h – {*a*, $\frac{a+b}{2}$,c}(2·$\frac{b}{2}$ m:2), составляющая множество 14), порождает 1140×6 + 128×3 = 7224 группы типа M^3, 1140×1 + 128×1 = 1268 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 1140×3 + 128×2 = 3676 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии.

Таким образом, задача вывода младших гемисимморфных пространственных групп трех независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии решена полностью.

Заметим при этом, что совпадение результатов вывода независимым от работы [7] методом младших гемисимморных групп трех независимых родов преобразований антисимметрии с числовыми результатами полученных на компьютере таких же групп, приведенных в работе [7], говорит об абсолютной верности осуществленных нами исследований.

5. Суммировав имеющиеся в п. 4 числовые результаты новых гемисимморфных групп отмеченных частных случаев Р-симметрии, порождаемых 36 гемисимморфными пространственными группами симметрии, каждая из которых содержит в системе своих образующих элементов три или большее число преобразований симметрии, которые можно заменять одновременно на соответствующие преобразования антисимметрии, среди которых обязательно должно быть три независимых рода, можно убедиться, что среди них имеются 29470 групп типа M^3, 5264 младших группы $(22\underline{1})$-симметрии и 15085 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии. При этом отметим, что среди 29470 младших групп трехкратной антисимметрии типа M^3, неизоморфных между собой только 36, столько же неизоморфных групп среди 5264 младших групп $(22\underline{1})$-симметрии и 15085 младших групп $(2\underline{2}1')$-симметрии, ввиду того, что в каждом семействе новых групп все младшие при любой Р-симметрии изоморфны своей порождающей группе [3], а отмеченные нами группы порождаются 36 неизоморфными гемисимморфными пространственными группами G_3.

Литература:

1. Палистрант Александр, Шенешеуцкая Алла. Младшие симморфные пространственные группы трех независимых родов преобразований антисимметрии, $(22\underline{1})$-симметрии и $(2\underline{2}1')$-симметрии // Analele ştiinţifice ale Univrsităţii de Stat din Moldova: Seria "Ştiinţe fizico-matematice". - Chişinău, 2006, p.102-108.
2. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Теория дискретных групп симметрии. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1977. -100 с.
3. Заморзаев А.М. Теория простой и кратной антисимметрии. - Кишинев: Штиинца, 1976. - 283 с.
4. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Трехмерные точечные группы гиперкристаллографических Р-симметрий и некоторые их приложения // Кристаллография. - 1999. - Т.44. - №6. - С.976-979.
5. Шубников А.В. Тридцать две кристаллографические группы, содержащие только повороты и антиповороты // Кристаллография. - 1965. - Т.10. - Вып.6. - С.775-778.
6. Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф. Геометрические аспекты теории групп. - Кишинев: Изд-во КГУ, 1978. - 59 с.
7. Яблан С.В. Обобщенные пространственные шубниковские группы // Publications de l'nst. Mathematique: Nouvelle serie. - 1986. - Т. 40 (54). - P.33-48.

Prezentat la 30.08.2007