

DINAMICA HAMILTONICĂ OPTICĂ ȘI HAOSUL DETERMINIST AL EXCITONILOR COERENȚI LA CUPLAREA ACESTORA ÎN BIEXCITONI

Costel ȘURA*, Anatol ROTARU*, Theodor GEREGHI, Iurie NICA

*Institutul de Matematică și Informatică al AȘM
Laboratorul de Cercetare Științifică „Sinergetica”

The Hamiltonian optic dynamics of coherent excitons and biexcitons was investigated at exciton excitation from the ground state and coupling of two excitons into a biexciton. The system of differential equations was obtained that describes the quasiparticle evolution. The computer simulation was carried out. The scenario of coherent motion breakdown and Hamiltonian chaos appearance was found. The parameter values were determined at which Hamiltonian dynamic chaos occurs

Introducere

Una dintre direcțiile prioritare ale științei moderne care se dezvoltă rapid în prezent este dinamica neliniară și haosul determinist în diverse sisteme clasice și cuantice [1]. Un interes deosebit prezintă studiul autoorganizării optice în medii condensate în legătură cu precizarea în ele a unor fenomene principale noi și a aplicațiilor lor la crearea unor noi materiale și dispozitive.

Dinamica stohastică în sisteme neliniare optice a fost cercetată de noi atât în cazul considerării, cât și în cel al neglijării proceselor de disipație a energiei.

În cazul neglijării proceselor de disipație a energiei sistemul este hamiltonian și apariția haosului dinamic este legată de distrugerea integralelor de mișcare a sistemului. În lucrările noastre este dezvoltată teoria instabilității stohastice în sistemele de excitoni, fotoni și biexcitoni coerente în medii condensate atât în cazul considerării proceselor de relaxare (apariția atractorilor strani în spațiul de fază), cât și în cazul neglijării lor (haosul dinamic hamiltonian) la diferite tranziții cuantice.

A fost demonstrat că în cazul considerării disipației cvasiparticulelor coerente și acțiunii pompajului extern, datorită creșterii instabilității, în spațiul de fază apar cicluri-limită și atractori strani, ceea ce atestă existența mișcării neliniare haotice și periodice a cvasiparticulelor coerente Bose condensate. Au fost găsite posibilele bifurcații de tipul bifurcație dublării de perioadă, bifurcației Hopf și bifurcației inverse Hopf. S-a demonstrat că trecerea în regimul haosului dinamic este realizată în rezultatul bifurcațiilor dublării de perioadă.

În cazul conservativ, mișcarea hamiltoniană dinamică neliniară este condiționată de distrugerea integralelor de mișcare sub acțiunea excitațiilor mici și apariției stratului stohastic în apropierea separatoarei.

În lucrarea dată a fost elaborată teoria haosului dinamic ultrascort ce apare în intervale de timp mai mici decât timpii caracteristici de relaxare a cvasiparticulelor în medii condensate datorită procesului de cuplare a doi excitoni în biexcitoni. În lucrările lui Keldysh și Ivanov [2] pentru prima dată s-a demonstrat că acest proces

este descris de termeni de tipul $D(p, q)b^+aa$ și $D^*ba^+a^+$, unde $a^+(a)$ și $b^+(b)$ sunt operatorii de creare (anihilare) a excitonului și a biexcitonului, respectiv.

Reieșind din hamiltonianul Keldysh-Ivanov cu considerarea termenilor antirezonanți, a fost obținut sistemul de ecuații diferențiale neliniare ce descrie dinamica cvasiparticulelor coerente.

A fost efectuat experimentul computațional și a fost demonstrată posibilitatea principală de apariție a haosului hamiltonian în cazul cuplării a doi excitoni în biexciton.

Până în prezent fenomenele optice în sistemul de excitoni și biexcitoni coerente au fost studiate în [3-7] doar cu considerarea forței gigantice a oscilatorului tranziției exciton-biexcitonice [4], adică a fost luat în considerație doar procesul de creare a biexcitonului \bar{p} prin captarea de către excitonul \bar{q} a fotonului $\bar{p} - \bar{q}$. Dar în [8, 9]

s-a demonstrat pentru prima dată că există un alt proces, determinat de termenul $\frac{1}{\sqrt{V}}D(\bar{p}, \bar{q})b_{\bar{p}}^+a_{\bar{q}}a_{\bar{p}-\bar{q}}$, care

descrie cuplarea directă a doi excitoni $\bar{p} - \bar{q}$ și \bar{q} în biexcitonul \bar{p} datorită atracției Coulombiene. În aceste lucrări a fost propus un mecanism principal nou de reconstruire exciton-biexcitonice a spectrului semiconductorului, determinat de cuplarea a doi excitoni în biexciton datorită interacțiunii lor Coulombiene. În particular, a fost demonstrat că anume acest mecanism duce la deplasarea efectivă în direcția undelor lungi atât a nivelului excitonic, cât și a celui biexcitonice.

În această lucrare s-a studiat dinamica neliniară a excitonilor, fotonilor și biexcitonilor coerente în cazul excitației excitonului din starea de bază și cuplării a doi excitoni în biexciton cu luarea în considerație a termenilor nerezonanți.

Hamiltonianul problemei și ecuațiile neliniare de mișcare

Hamiltonianul excitonilor, biexcitonilor și al fotonilor coerenți distribuiți uniform în cristal se reprezintă astfel:

$$\begin{aligned} H_0 &= \hbar\omega_a a_k^+ a_k + \hbar\omega_b b_{2k}^+ b_{2k} + \hbar\omega_e c_k^+ c_k \\ H_{\text{int}} &= ig\hbar(c_k^+ + c_{-k})a_k + iD\hbar(a_k^+ + a_{-k})(a_k^+ + a_{-k})b_{2k} + H.C. \end{aligned} \quad (1)$$

unde a_k^+ (a_k), b_k^+ (b_k) și c_k^+ (c_k) sunt operatori de creare (anihilare) a excitonilor, biexcitonilor și, respectiv, a fotonilor cu vectorul de undă \vec{k} și energia $\hbar\omega_a$, $\hbar\omega_b$ și $\hbar\omega_e$, respectiv, g_k este constanta interacțiunii exciton-fotonice, D – constanta conversiei a doi excitoni în biexciton, \hbar – constanta Plank.

În continuare considerăm $\hbar = 1$ și introducem variabilele acțiune-ungchi:

$$\begin{aligned} a_k &= \sqrt{n}e^{-i\varphi_a + ikx}, a_k^+ = \sqrt{n}e^{i\varphi_a - ikx} \\ c_k &= \sqrt{f}e^{-i\varphi_e + ikx}, c_k^+ = \sqrt{f}e^{i\varphi_e - ikx} \\ b_{2k} &= N^{1/2} \exp[-i\varphi_b + i2kx], b_{2k}^+ = N^{1/2} \exp[i\varphi_b - i2kx] \end{aligned} \quad (2)$$

unde $n, \varphi_a, N, \varphi_b, f, \varphi_e$ sunt numerele și fazele excitonilor, biexcitonilor și ale fotonilor.

Atunci hamiltonianul se reprezintă astfel:

$$\begin{aligned} H_0 &= \omega_a n + \omega_b N + \omega_e f \\ H_{\text{int}} &= 4g(nf)^{1/2} \cos \varphi_e \sin \varphi_a + 8DnN^{1/2} \cos^2 \varphi_a \sin \varphi_b \end{aligned} \quad (3)$$

Din (3) obținem sistemul de ecuații diferențiale neliniare ce descriu evoluția dinamică a cvasiparticulelor coerente:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_a} = -4g(nf)^{1/2} \cos \varphi_e \cos \varphi_a + 16DnN^{1/2} \cos \varphi_a \sin \varphi_a \sin \varphi_b \\ \frac{d\varphi_a}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial n} = \omega_a + 2g\left(\frac{f}{n}\right)^{1/2} \cos \varphi_e \sin \varphi_a + 8DN^{1/2} \cos^2 \varphi_a \sin \varphi_b \\ \frac{dN}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_b} = -8DnN^{1/2} \cos^2 \varphi_a \cos \varphi_b, \\ \frac{d\varphi_b}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial N} = \omega_b + 4D\frac{n}{N^{1/2}} \cos^2 \varphi_a \sin \varphi_b \\ \frac{df}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_e} = 4g(nf)^{1/2} \sin \varphi_e \sin \varphi_a, \\ \frac{d\varphi_e}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial f} = \omega_e + 2g\left(\frac{n}{f}\right)^{1/2} \cos \varphi_e \sin \varphi_a. \end{aligned} \quad (4)$$

Întroducând notațiile

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{\omega_a - \omega_e}{\omega_e}, \quad \Delta_2 = \frac{\omega_b - 2\omega_a}{\omega_e}, \\ \psi_1 &= \varphi_a - \varphi_e, \quad \varphi_1 = \varphi_a + \varphi_e, \\ \psi_2 &= \varphi_b - 2\varphi_a, \quad \varphi_2 = \varphi_b + 2\varphi_a, \\ \lambda &= \frac{2g}{\omega_e}, \quad \Lambda = \frac{4D}{\omega_e}\end{aligned}\tag{5}$$

obținem:

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \lambda (fn)^{1/2} [\cos \psi_1 - \varepsilon \cos \varphi_1], \\ \dot{n} &= -\lambda (fn)^{1/2} [\cos \psi_1 + \varepsilon \cos \varphi_1] + \Lambda n N^{1/2} [\cos \psi_2 - \varepsilon \cos \varphi_2], \\ \dot{N} &= -\frac{\Lambda}{2} n N^{1/2} [\cos \psi_2 + \varepsilon \cos \varphi_2 + 2\varepsilon \cos \varphi_b], \\ \psi_1 &= \Delta_1 + \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{f}{n} \right)^{1/2} - \left(\frac{n}{f} \right)^{1/2} \right] \left\{ \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \varphi_1 \right\} + \frac{\Lambda}{2} N^{1/2} [2\varepsilon \sin \varphi_b + \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2], \\ \varphi_1 &= \Delta_1 + 2 + \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{f}{n} \right)^{1/2} + \left(\frac{n}{f} \right)^{1/2} \right] \left\{ \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \varphi_1 \right\} + \frac{\Lambda}{2} N^{1/2} [2\varepsilon \sin \varphi_b + \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2], \\ \psi_2 &= \Delta_2 - \Delta_1 + \Lambda \left\{ \frac{n}{4N^{1/2}} - N^{1/2} \right\} [2\varepsilon \sin \varphi_b + \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2] - \lambda \left(\frac{f}{n} \right)^{1/2} \left\{ \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \varphi_1 \right\}, \\ \varphi_2 &= 4 + 3\Delta_1 + \Delta_2 + \Lambda \left\{ \frac{n}{4N^{1/2}} + N^{1/2} \right\} [2\varepsilon \sin \varphi_b + \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2] + \lambda \left(\frac{f}{n} \right)^{1/2} \left\{ \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \varphi_1 \right\}, \\ \varphi_b &= 2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \frac{\Lambda}{4} \frac{n}{N^{1/2}} [2\varepsilon \sin \varphi_b + \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \varphi_2].\end{aligned}\tag{6}$$

Aici punctul denotă derivata după parametrul adimensional $\tau = t \cdot \omega_{ph}$. Parametrul ε se introduce în așa mod, încât atunci când neglijăm termenii antirezonanți $\varepsilon = 0$, iar când $\varepsilon = 1$ sistemul de ecuații (6) este echivalent cu sistemul de ecuații (4). În aproximarea rezonantă ($\varepsilon = 0$) sistemul are o integrală de mișcare a numărului de particule:

$$n + f + 2N = C\tag{7}$$

Experiența computațională și haosul dinamic

Analiza numerică a sistemului (6) a fost efectuată în cazul normării integralei (5) la unitate. Au fost introduse notațiile $\bar{n} = \frac{n}{C}$, $\bar{f} = \frac{f}{C}$, $\bar{N} = \frac{N}{C}$, $\bar{\lambda} = \lambda$, $\bar{\Lambda} = \Lambda C^{1/2}$. În continuare omitem bara orizontală.

În caz general, sistemul de ecuații (6) are o singură integrală de mișcare – energia sistemului – și regiunea de mișcare în spațiul de fază este o hipersuprafață pentadimensională, determinată de (1), în spațiu de fază hexadimensional.

Pentru valori mici ale parametrilor λ și Λ mișcarea are un caracter cvasiperiodic. Termenii nerezonanți generează armonici care modulează amplitudinea oscilațiilor rezonante.

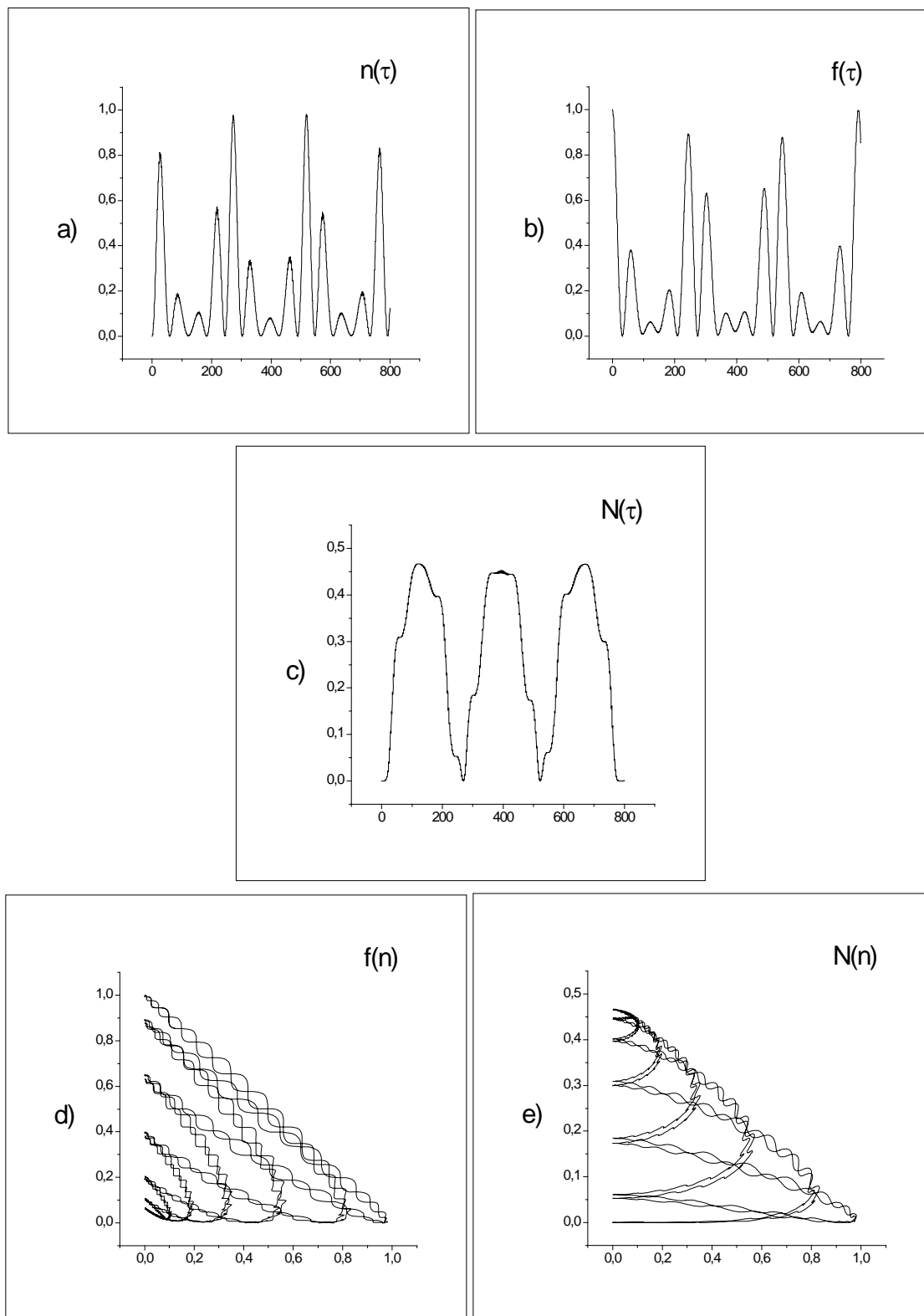


Fig.1. Evoluția temporală a numerelor excitonilor (a), fotonilor (b), biexcitonilor (c) și proiecțiile traiectoriei de fază pe planurile (f, n) (d) și (N, n) (e) când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,1$.

Mișcarea traiectoriei de fază are loc pe suprafața unui set de tori interconecțate. Diametrul torilor depinde de mărimea valorilor λ și Λ . În Figura 1 este reprezentată dinamica temporală a cvasiparticulelor coerente și proiecții ale portretului de fază pentru valori $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,1$. Spectrele puterii oscilațiilor numerelor n , f și N au un număr mic de frecvențe (Fig.2).

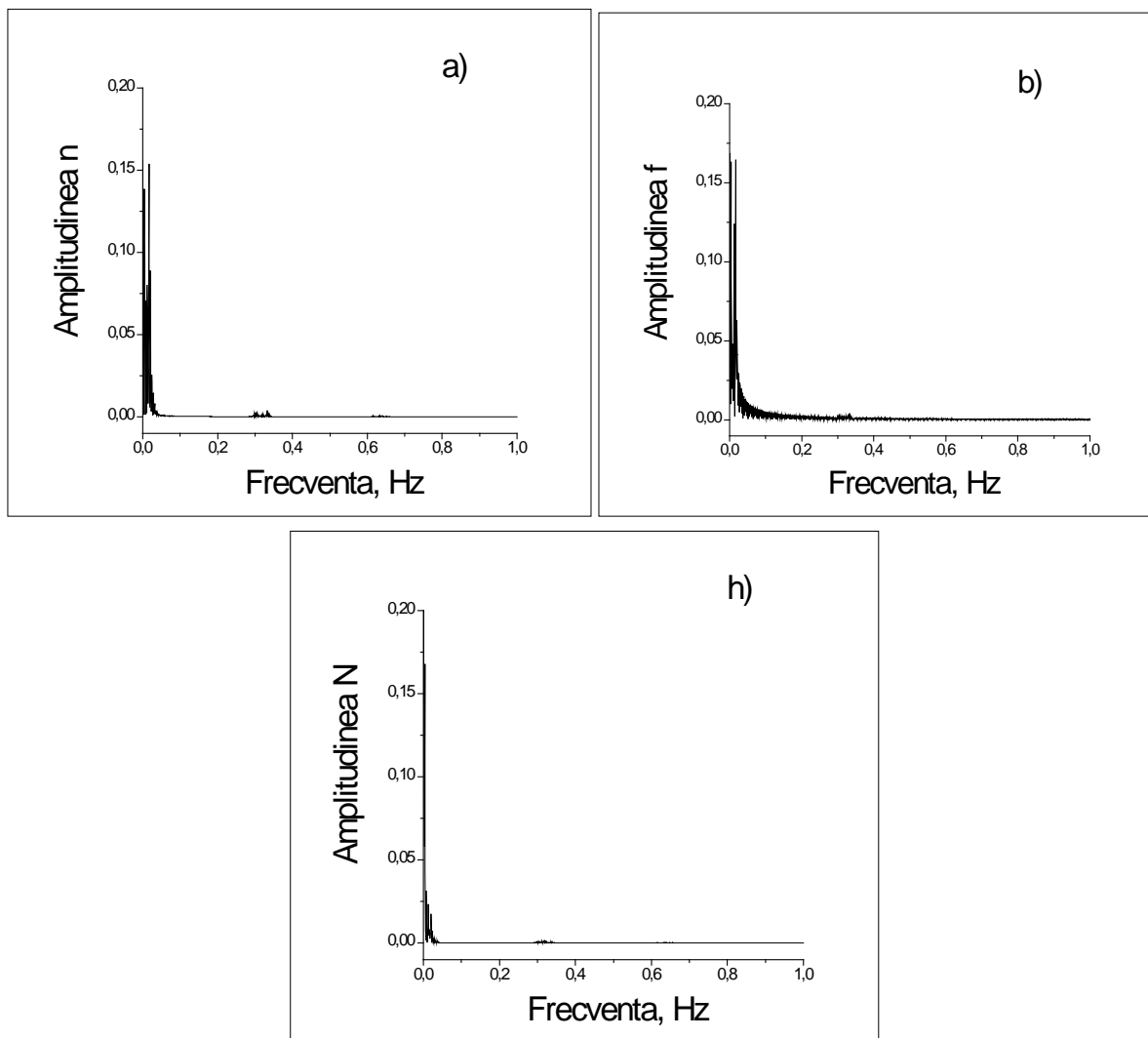


Fig.2. Spectrele puterii oscilațiilor numerelor de excitoni (a), fotoni (b) și de biexcitoni (c), când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,1$.

La creșterea valorilor λ și Λ sistemul se comportă în mod diferit. Fixând Λ , observăm că cu creșterea λ caracterul mișcării rămâne cvasiperiodic. Pentru valori $\lambda > \Lambda$ termenul liniar de pe lângă λ este dominant. Spectrele puterii oscilațiilor numerelor de excitoni și fotoni sunt foarte asemănătoare, iar spectrul puterii oscilațiilor numărului de biexcitoni diferă de cele două (Fig.3). Amplitudinea oscilațiilor numărului biexcitonilor este cu mult mai mică decât amplitudinea oscilațiilor numerelor excitonilor și fotonilor. Torii perturbați își măresc diametrul și acoperă o mare parte din spațiul de fază (Fig.4).

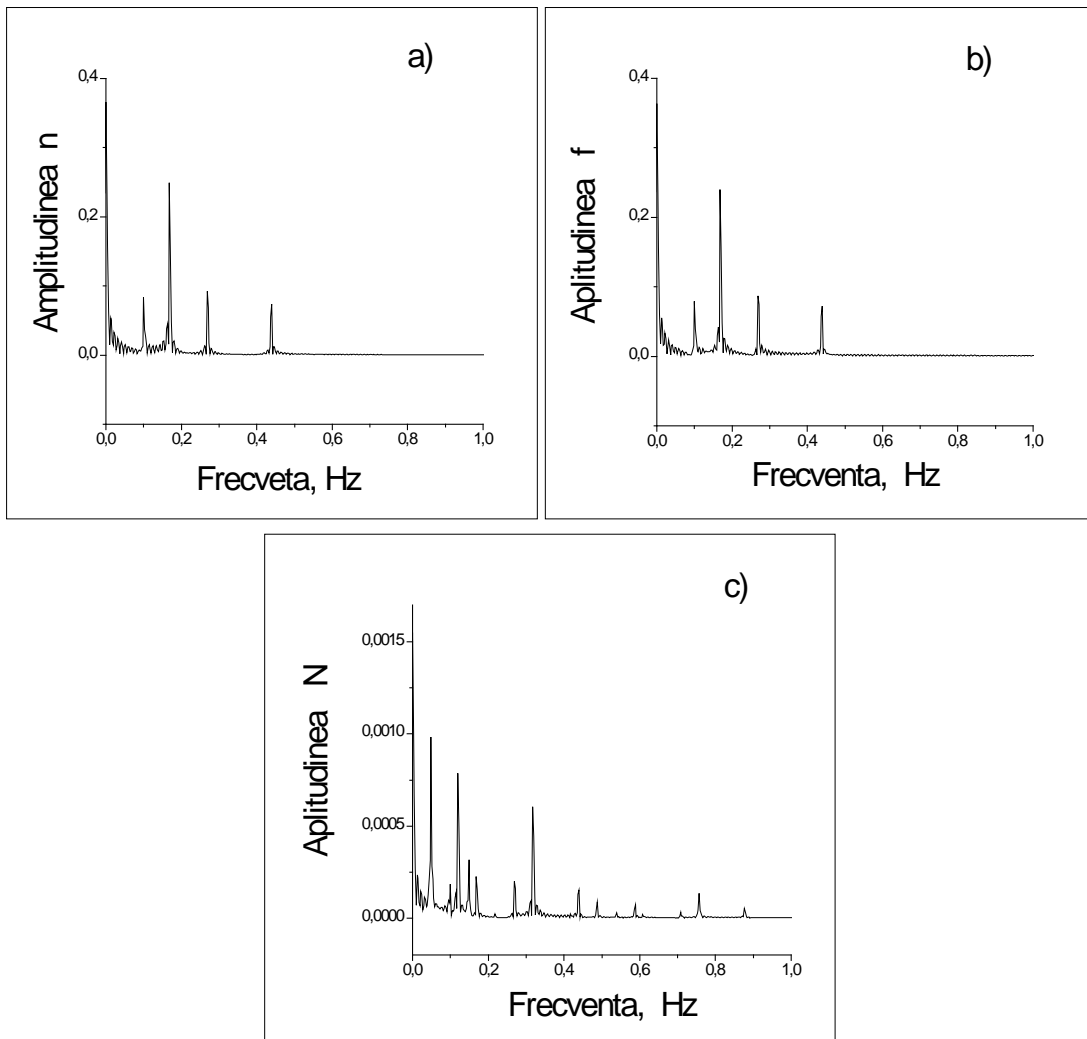
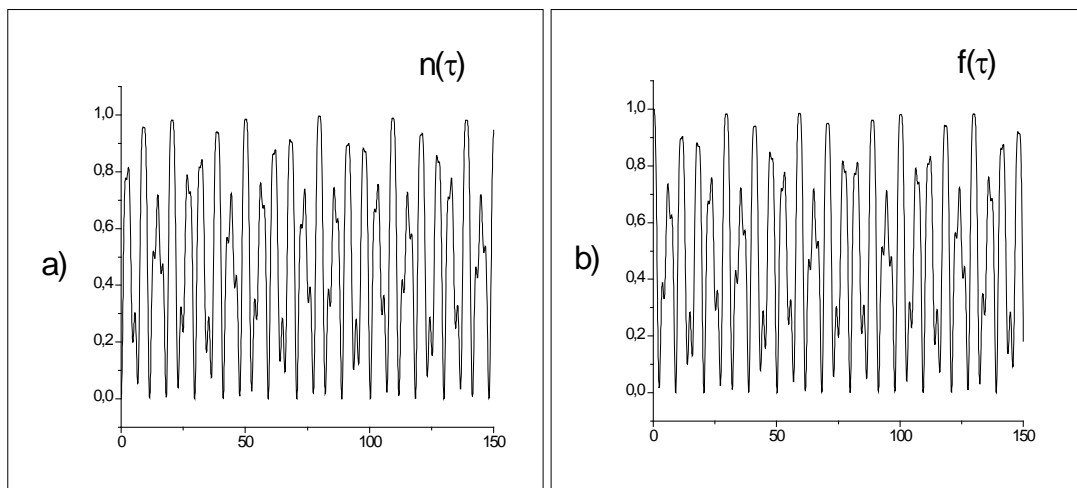


Fig.3. Spectrele puterii oscilațiilor numerelor de excitoni (a), fotoni (b) și de biexcitoni (c), când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 0,9$ și $\Lambda = 0,1$.

La apropierea λ de 1 și $\lambda > \Lambda$ în spectrele puterii ale numerelor n și f prima frecvență se apropie de 0, iar frecvențele a doua și a treia se apropie una de alta, contopindu-se la valoarea $\lambda = 1$ (Fig.5). În sistem apare o cvasiintegrală de mișcare $n + f \approx const$, deformată de interacțiunea neliniară. Evoluția sistemului are un caracter mai regulat. (Fig.6).



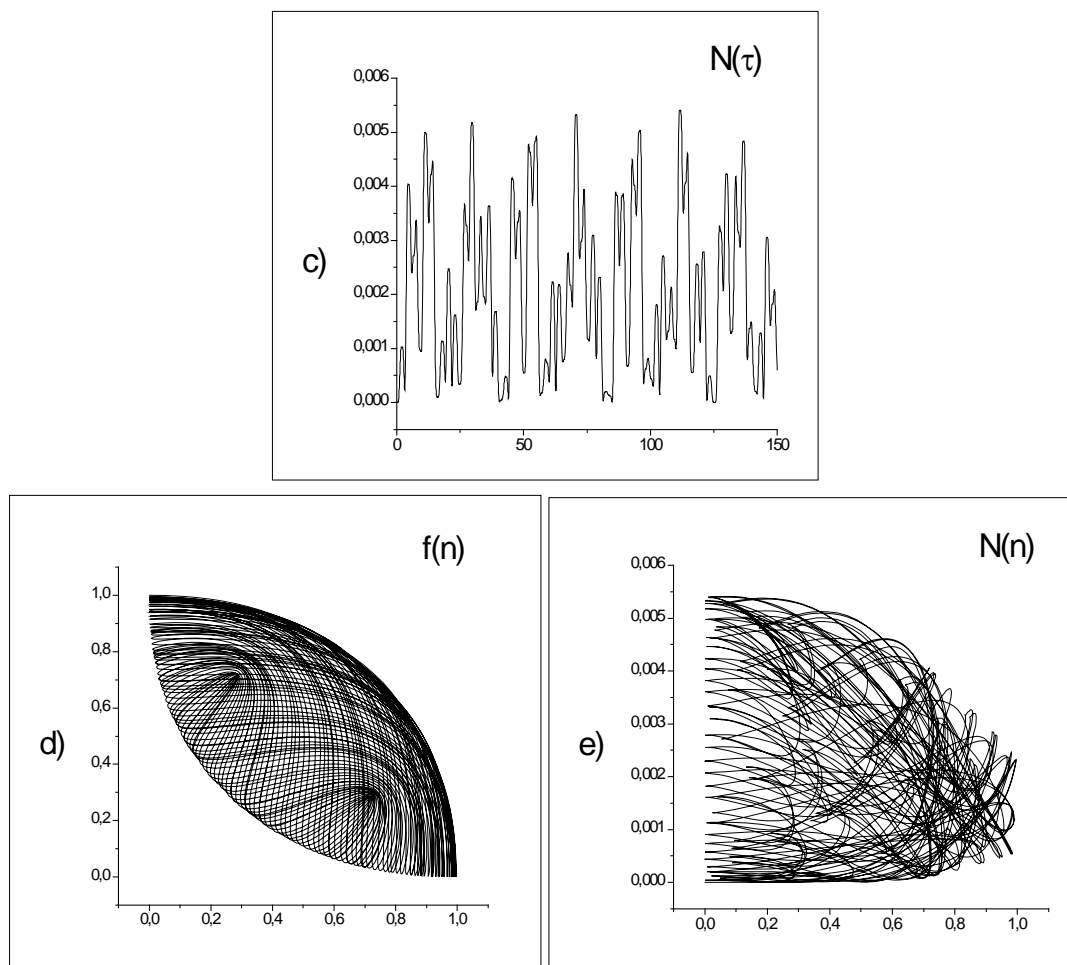


Fig.4. Evoluția temporală a numerelor excitonilor (a), fotonilor (b), biexcitonilor (c) și proiecțiile traiectoriei de fază pe planurile (f, n) (d) și (N, n) (e), când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 0,9$ și $\Lambda = 0,1$.

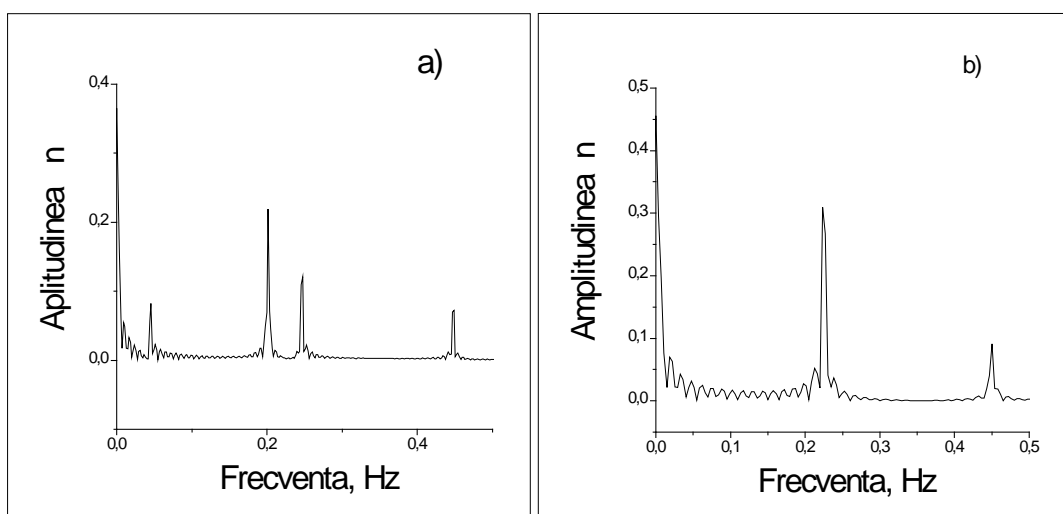


Fig.5. Spectrele puterii oscilațiilor numărului de excitoni, când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\Lambda = 0,1$, $\lambda = 0,98$ (a) și $\lambda = 1$ (b).

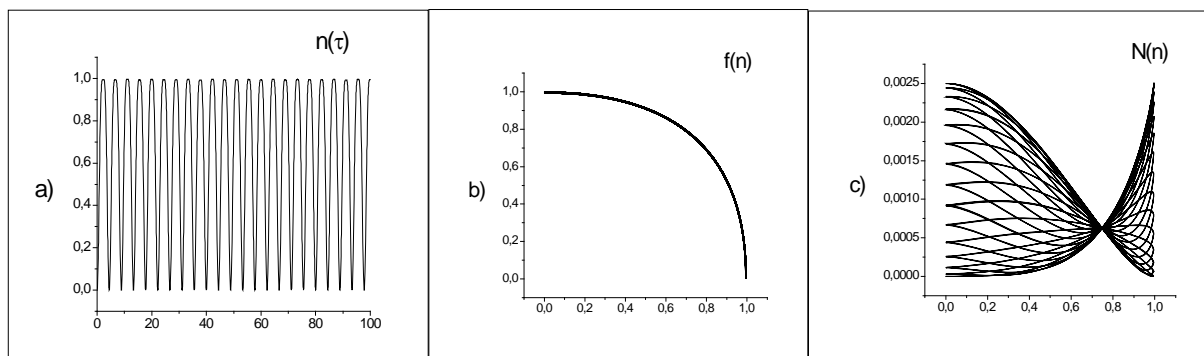
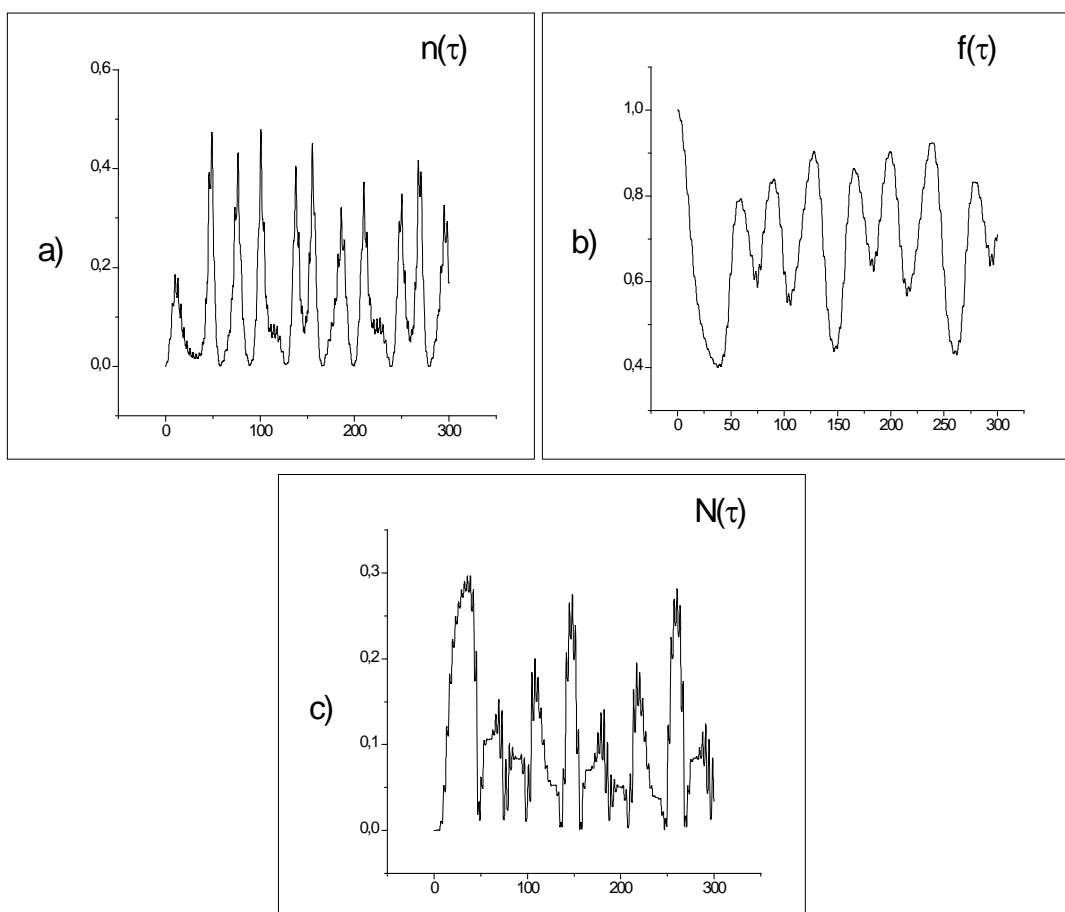


Fig.6. Evoluția temporală a numărului de excitoni (a) și proiecțiile portretului de fază în planurile (f, n) (b) și (N, n) (c) când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 1$ și $\Lambda = 0,1$.

Fixând λ , cu creșterea Λ dinamica sistemului devine tot mai complexă (Fig.7). Pentru valori $\Lambda > \lambda$ moda neliniară devine dominantă. Spectrele puteri oscilațiilor devin continue, ceea ce denotă apariția haosului dinamic (Fig.8). Spectrele puterii oscilațiilor numerelor excitonilor și biexcitonilor sunt asemănătoare, iar spectrul puterii numărului de fotoni diferă de al celor două.



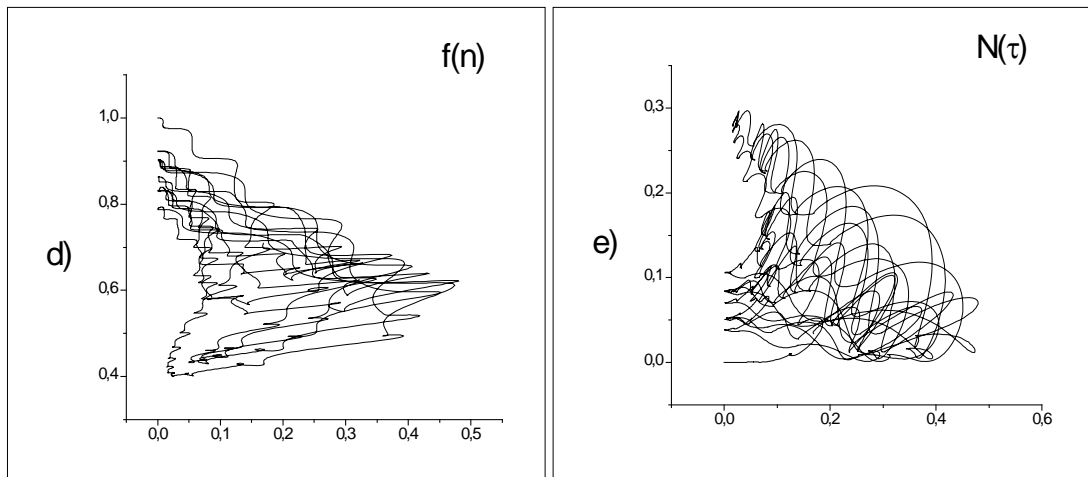


Fig.7. Evoluția temporală a numerelor de excitoni (a), fotonilor (b), biexcitonilor (c) și proiecțiile traiectoriei de fază pe planurile (f, n) (d) și (N, n) (e), când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,95$.

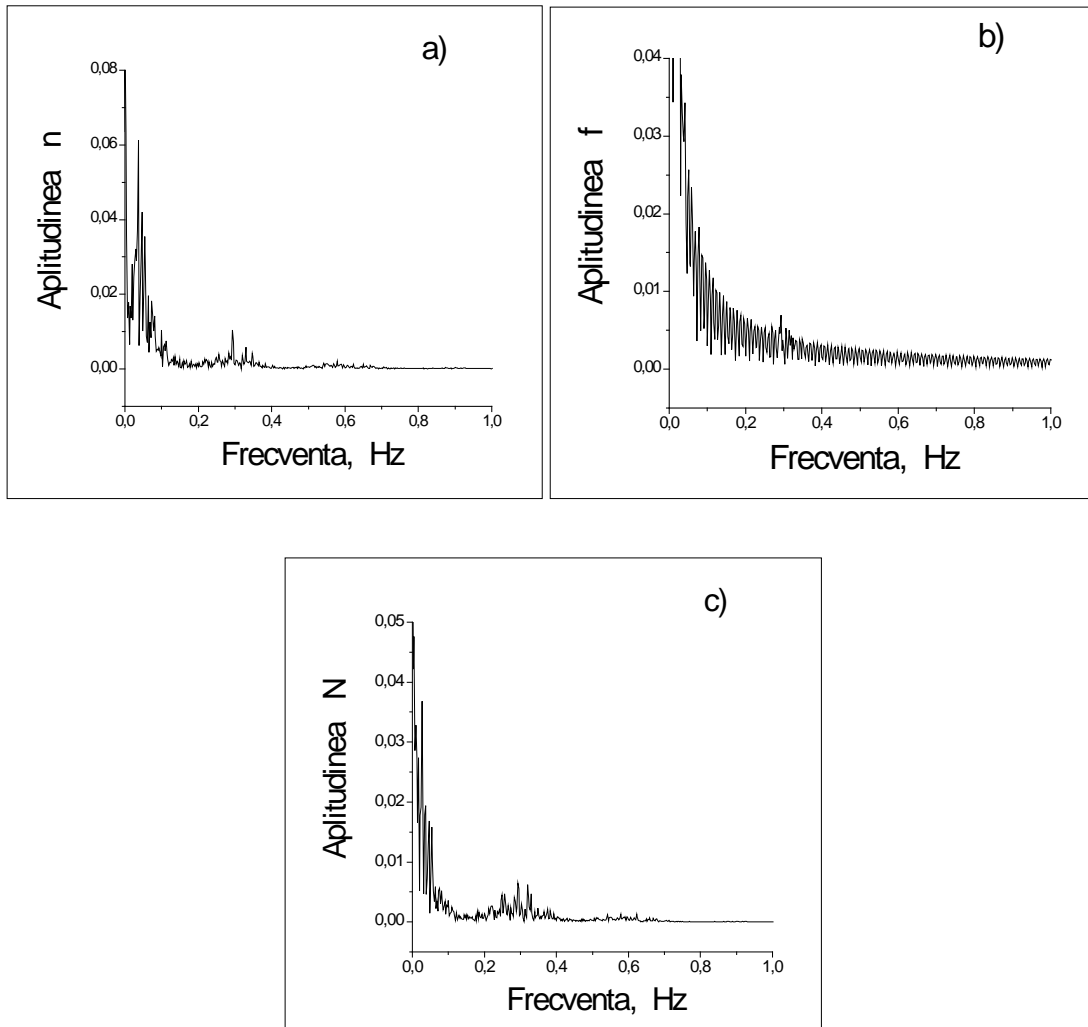


Fig.8. Spectrele puterii oscilațiilor numerelor de excitoni (a), fotoni (b) și biexcitoni (c), când $n_0 = 10^{-8}$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^{-8}$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^{-8}$, $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,95$.

Distanța dintre două traiectorii apropiate inițial este determinată de expresia

$$S = \left[(n_1 - n_2)^2 + (N_1 - N_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\varphi_{i1} - \varphi_{i2}}{2\pi} \right\}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\psi_{i1} - \psi_{i2}}{2\pi} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varphi_{b1} - \varphi_{b2}}{2\pi} \right\}^2 \right]^{1/2}$$

Incrementul de descompunere a mișcării coerente γ_s îl găsim din expresia

$$S = S_0 \exp(\gamma_s \tau)$$

În Figura 9 este reprezentată dezvoltarea instabilității locale pentru diferite valori λ și Λ .

Pentru valori mici ale Λ (Fig.9a și 9b) distanța dintre traiectoriile de fază rămâne mică în timp. Pentru Λ aproape de 1 are loc dezvoltarea instabilității locale, distanța dintre traiectoriile inițial apropiate crește până la 1. Pentru parametrii din Figura 5c incrementul de descompunere a mișcării coerente $\gamma_s = 0,04$.

În concluzie vom evalua posibilitatea observării experimentale a haosului dinamic pentru cristale de tip

$$CdS, \text{ în care } \hbar D = 10^{-3} \text{ ev} \cdot \text{cm}^{3/2}, \hbar g = 0,1 \text{ ev} \cdot \text{cm}^{-1/2} \cdot V^{-1/2}, \hbar \omega_a = 2 \text{ eV}, \hbar \omega_e \approx 2 \text{ eV}.$$

$$\bar{\lambda} = \frac{2g}{\omega_e} = 0,1, \quad \bar{\Lambda} = \frac{4D}{\omega_e} \cdot \sqrt{C} = 0,2,$$

când concentrația cvasiparticulelor $C = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Când $C > 2,5 \cdot 10^{17}$, valoarea $\bar{\Lambda} > 1$ și în cristalele de tipul CdS este posibil a observa haosul dinamic ultrascort în sistemul studiat.

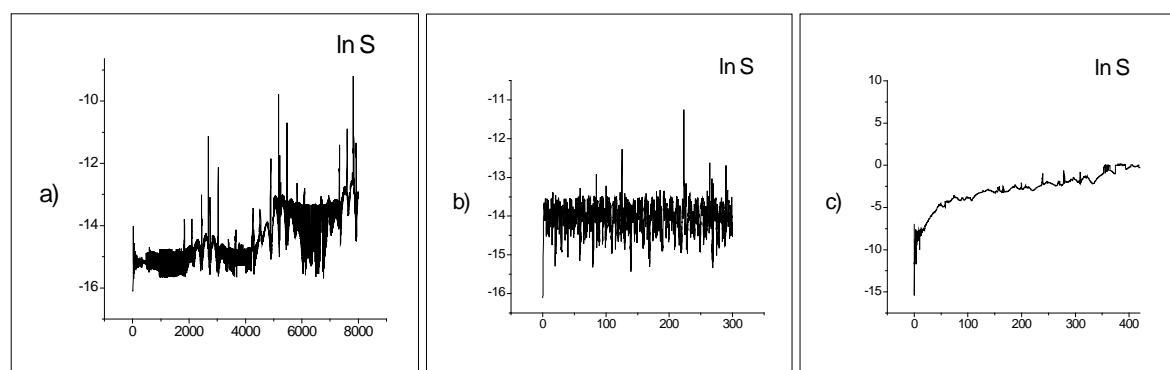


Fig.9. Dependența temporală a distanței dintre traiectorii apropiate inițial, când $n_0 = 10^8$, $f_0 = 1$, $N_0 = 10^8$, $\varphi_{a0} = \varphi_{b0} = 1,571$, $\varphi_{e0} = 10^8$, $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,1$ (a), $\lambda = 0,9$ și $\Lambda = 0,1$ (b), $\lambda = 0,1$ și $\Lambda = 0,95$ (c).

Referințe:

1. Kazunori A., Nonlinear Dynamics and chaos in semiconductors. – Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 2001, p.570.
2. Snoke D.W., Moskalenko S. A. Bose-Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons: And Coherent Nonlinear Optics With Excitons. – Cambridge Univ. Pr., 2000, p.415.
3. Москаленко С.А., Хаджи П.И., Ротару А.Х. Солитоны и нутация в экситонной области спектра. – Кишинёв: Штиинца, 1985, с.195.
4. Хаджи П.И. Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках. – Кишинёв: Штиинца, 1985, с.209.
5. Шмиглюк М.Н., Питей В.Н. Когерентные поляритоны в полупроводниках. – Кишинёв: Штиинца, 1989, с.134.
6. Ротару А.Х., Залож В.А. Оптическая самоорганизация экситонов и биэкситонов в полупроводниках. – Кишинёв: Штиинца, 1990, с.115.
7. Хаджи П.Н., Москаленко С.А., Белкин С.Н. Явление нутации в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в области М-полосы // Письма в ЖЭТФ. – 1979. – Т.29. – Выпуск 4. – С.3291-3297.
8. Rotaru A.H., Troncu V.Z. Nonlinear time-independent and time-dependent propagation of light in direct-gap semiconductors with paired excitons bound into biexcitons // JETP. – November 1997. – Vol.85. – No5. – P.971-978.

9. Rotaru A.Kh., Shura K.V. Dynamic optical chaos of coherent excitons and biexcitons in semiconductors // JETP. – July 1993. – Vol.77. – No1. – P.60-67 [Zh. Eksp. Teor. Fiz., July 1993 vol.104, p.2374-2387].

Lucrarea a fost îndeplinită în cadrul Proiectului de cercetări „Sisteme multidimensionale integrabile și prioritățile lor geometrice”, cu susținerea Academiei de Științe a Moldovei și a Fondului de Cercetări Fundamentale ale Rusiei (Grant Nr. 11R 06.01. CRF).

Prezentat la 22.04.2009