

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С МАКСИМАЛЬНЫМ  
ЗНАЧЕНИЕМ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ СВОБОДНЫХ  
ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

*Любовь ТРИФАНОВА*

*Центр информационных технологий*

Se cercetează problema de proiectare optimă a plăcilor local ortotropice cu valoarea maximă a frecvenței fundamentale de vibrații libere transversale. Ca parametru de proiectare se alege funcția de distribuire a unghiului de anizotropie.

Problema a fost rezolvată numeric cu ajutorul metodei de elemente finite. Au fost realizate calcule numerice pentru placa pătrată din sticla-plastic rezemată rigid pe contur. Folosind rețelele grosiere, a fost obținută soluția optimă care păstrează simetria pătratului, de aceea soluția optimă se căuta cu rețele fine în clasa funcțiilor simetrice.

Simetria pătratului a permis rezolvarea problemei pe o optime a plăcii. Soluția obținută în această regiune a fost prelungită pentru toată placa folosindu-se transformările simetrice.

The problem of designing anisotropic plane plates with maximum fundamental frequency of free transverse vibrations is considered. The optimal design is performed with respect to the fiber orientations. This problem is solved numerically using the finite element method.

Numerical calculations are performed for square shape plate with clamp boundary. The plate made of glass-fiber material is examined. The optimal solution was found in the class of symmetrical functions which keep the plate's symmetry. This restriction was made due the symmetry of the optimal solution that we obtained when solving the problem using coarse finite element mesh.

Due to the plate's symmetry, invariance of vibration frequency and the symmetry of optimal solution the problem is resolved for 1/8 part of the plate. The obtained solution is extended for the whole plate using symmetrical transformations.

Нами рассматривалась задача оптимального проектирования анизотропных пластин. В качестве параметра проектирования выбиралась функция распределения угла анизотропии, а критерием оптимизации служила фундаментальная частота свободных изгибных колебаний.

### 1. Формулировка задачи оптимального проектирования

Рассмотрим анизотропную пластину, занимающую область  $\Omega$ , с граничным контуром  $\Gamma$ . Свяжем с пластиной декартову систему координат  $xoy$ , проходящую через срединную поверхность недеформированной пластинки. Поперечные колебания пластинки будем описывать функцией  $w(x, y, t)$ , задающей отклонение точки с координатами  $(x, y)$  срединной поверхности пластинки от ее невозмущенного состояния в момент времени  $t$ . В статье анализируются гармонические колебания, для которых  $w(x, y, t) = w^0(x, y)e^{i\omega t}$ , где  $w^0(x, y)$  – амплитудное значение перемещений (ниже верхний индекс 0 в обозначении амплитуды будет опускаться),  $\omega$  – частота свободных колебаний пластины.

Исследовалась локально-ортотропная пластина, анизотропные свойства которой описываются функцией распределения угла анизотропии  $\varphi(x, y)$ , задающей угол наклона большей из осей ортотропии в точке с координатами  $x, y$  к оси  $ox$  фиксированной системы координат.

Для определения фундаментальной частоты и соответствующей ей формы свободных колебаний воспользуемся вариационным принципом Рэлея [1]:

$$\omega_1^2 = \min_{w(x,y) \in B} \frac{U(w)}{T(w)}, \quad (1)$$

где  $U(w)$ ,  $T(w)$  – амплитудные значения потенциальной и кинетической энергии свободно колеблющейся пластины, а символом  $B$  обозначены кинематические граничные условия.

Для свободных поперечных колебаний амплитудные значения потенциальной энергии деформированной анизотропной пластинки записываются в виде [1], [2]:

$$U(\varphi, w) = \int_{\Omega} V(\varphi, w) dx dy; \quad (2)$$

$$V(\varphi, w) = \frac{1}{2} [D_{11}(\varphi)w_{xx}^2 + 2D_{12}(\varphi)w_{xx}w_{yy} + D_{22}(\varphi)w_{yy}^2 + 4(D_{16}(\varphi)w_{xx} + D_{26}(\varphi)w_{yy})w_{xy} + 4D_{66}w_{xy}^2],$$

где  $V(\varphi, w)$  – плотность потенциальной энергии изгиба пластины,  $D_{ij}(\varphi)$  – изгибные жесткости, которые задаются следующими соотношениями [2]:

$$\begin{aligned} D_{11}(\varphi) &= D_x \cos^4 \varphi + 2D_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + D_y \sin^4 \varphi, \\ D_{12}(\varphi) &= D_1 + (D_x + D_y - 2D_3) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \\ D_{22}(\varphi) &= D_x \sin^4 \varphi + 2D_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + D_y \cos^4 \varphi, \\ D_{16}(\varphi) &= (D_x \cos^2 \varphi - D_y \sin^2 \varphi - D_3 \cos 2\varphi) \cos \varphi \sin \varphi, \\ D_{26}(\varphi) &= (D_x \sin^2 \varphi - D_y \cos^2 \varphi + D_3 \cos 2\varphi) \cos \varphi \sin \varphi, \\ D_{66}(\varphi) &= D_{xy} + (D_x + D_y - 2D_3) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

В выражениях (3)  $D_x, D_y, D_{xy}, D_1$ , – изгибные жесткости в осях ортотропии, а  $D_3 = D_1 + 2D_{xy}$ . Амплитудное значение кинетической энергии пластины вычисляется из соотношения [1]:

$$T(w) = \frac{\rho h}{2} \int_{\Omega} w^2(x, y) dx dy, \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $h$  – толщина пластинки.

Задача оптимального проектирования заключается в определении такого распределения угла анизотропии  $\varphi(x, y)$ , для которого фундаментальная частота изгибных колебаний анизотропной пластины принимает экстремальное значение:

$$\varphi^{opt}(x, y): \quad \omega_1^2(\varphi) \rightarrow \max_{\varphi} (\min), \quad (5)$$

где фундаментальная частота  $\omega_1^2$  определяется соотношениями (1)–(4).

## 2. Дискретизация задачи оптимального проектирования

Для нахождения собственных частот свободных колебаний пластины применялся метод конечных элементов (МКЭ). Вывод конечно-элементных соотношений осуществлялся на основе вариационного представления (1) для фундаментальной частоты. Область  $\Omega$ , занимаемая пластиной, разбивалась на  $N$  треугольных элементов  $\Delta^e, e = 1, \dots, N$ , с узлами в вершинах элементов. Прогиб пластины  $w^e(x, y)$  внутри каждого элемента аппроксимировался кубическим полиномом [4]. При этом принималось, что внутри каждого элемента ориентация осей ортотропии фиксирована, т.е.  $\varphi(x, y) \equiv \varphi_e, (x, y) \in \Delta^e, e = 1, \dots, N$ .

В результате стандартных конечно-элементных вычислений приходим к дискретной формулировке континуальной задачи оптимизации (1)–(4):

$$\omega_1^2(\vec{\varphi}) = \min_{\{\vec{\delta}\}} \frac{\{\vec{\delta}\}^T [K_{\vec{e}\vec{c}\vec{a}}(\vec{\varphi})] \{\vec{\delta}\}}{\{\vec{\delta}\}^T [M] \{\vec{\delta}\}}, \quad (6)$$

где  $\vec{\varphi}^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  – вектор параметров проектирования,  $\{\vec{\delta}\}^T = (\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \dots, \vec{\delta}_v)$  – глобальный вектор узловых перемещений,  $[K_{\vec{e}\vec{c}\vec{a}}(\vec{\varphi})], [M]$  – глобальные матрицы жесткости и масс. Отметим, по построению матрицы  $[K_{\vec{e}\vec{c}\vec{a}}(\vec{\varphi})], [M]$  симметричны и положительно определенные.

Задача оптимизации состоит в отыскании вектора параметров  $\vec{\varphi}$ , для которого фундаментальная частота свободных колебаний (6) принимает экстремальное значение:

$$\vec{\varphi}^{opt} : \omega_1^2(\vec{\varphi}) \rightarrow \max_{\vec{\varphi}}(\min_{\vec{\varphi}}). \quad (7)$$

### 3. Численное решение задачи оптимизации

Численные расчеты были выполнены для квадратной жестко защемленной пластины единичной площади, изготовленной из стеклопластика с характеристиками [3]:

$$E_1 / E_2 = 3, \quad E_1 / G_{12} = 6, \quad E_2 / G_{12} = 2; \quad \nu_{12} = 0,083, \quad \nu_{21} = 0,25. \quad (8)$$

Отвечающие этим характеристикам изгибные жесткости вычислялись по формулам [2]:

$$D_1 = \frac{E_1 \nu_{12} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_y = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{xy} = \frac{G_1 h^3}{12}. \quad (9)$$

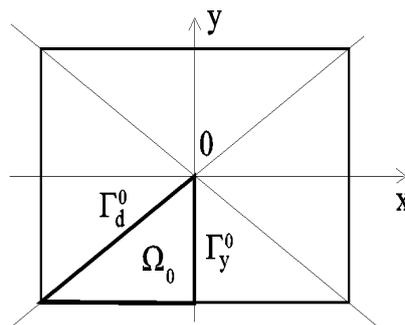
При выполнении расчетов использовались безразмерные величины:

$$x = lx', \quad y = ly', \quad \omega = \frac{\omega'}{\rho h l^4} \sqrt{\frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}}, \quad (10)$$

где  $l$  – сторона квадрата,  $E_1, E_2, G_{12}$  – модули упругости,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона ортотропного материала. В расчетах принималось  $E_1 = 1$ .

Численное решение задачи оптимизации осуществлялось методом последовательной оптимизации [5]. При решении задачи оптимизации на крупных сетках полученное решение имело симметрию квадратной пластины. В соответствии с этим оптимальное решение для мелкомасштабного разбиения пластины на конечные элементы искалось в классе функций, сохраняющих симметрию пластины.

В силу симметрии собственных форм колебания для квадратной пластины с симметричным распределением угла анизотропии задача на собственные значения решалась на  $1/8$  части пластины – подобласти  $\Omega_0$  (рис.1.), симметричными преобразованиями которой можно получить всю пластину. Найденное в данной области решение было продолжено на всю пластину, с использованием преобразований симметрии: отображения относительно осей симметрии и поворотов относительно центра на углы, кратные  $\pi/4$ .



$\Omega$

Рис. 1. Оси симметрии квадрата.

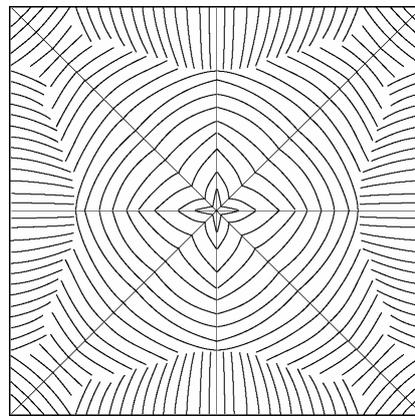
Полученное в результате расчетов оптимальное распределение угла анизотропии представлено на рис. 2. В таблице приведены значения частот свободных поперечных колебаний как для оптимального армирования пластинки, так и результаты параметрических расчетов. В первой строке таблицы представлены значения частот для постоянного распределения угла анизотропии  $\varphi(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \Omega$ , т.е. направление армирования совпадает со стороной квадрата. Во второй строке таблицы даны частоты для  $\varphi(x, y) \equiv \pi/4$ , где  $(x, y) \in \Omega_0$ . В этом случае армирование на всей пластине определяется в

результате продолжения данного распределения угла анизотропии с области  $\Omega_0$  на область  $\Omega$  посредством симметричных преобразований. Анализ представленных в таблице результатов показывает, что значение фундаментальной частоты для оптимального проекта существенно превышает значение фундаментальной частоты пластин с параметрическими распределениями угла анизотропии. В таблице наряду со значением фундаментальной частоты приведены также значения ряда высших частот свободных колебаний для каждого из рассмотренных способов армирования.

Таблица

**Частоты свободных поперечных колебаний анизотропной квадратной жесткозашемленной пластины**

Распределение угла анизотропии	Частоты свободных колебаний							
$\varphi(x, y) \equiv 0$ $(x, y) \in \Omega$	7,978	13,41	18,87	22,76	23,28	31,41	35,39	35,70
$\varphi(x, y) \equiv \pi / 4$ $(x, y) \in \Omega_0$	7,660	16,00	23,34	25,97	28,82	34,44	45,50	47,28
$\varphi^{opt}(x, y)$ $(\omega_1^2 \rightarrow \max)$	9,233	16,52	24,85	28,73	29,81	36,54	46,10	47,71



**Рис.2.** Оптимальный проект жесткозашемленной пластины с максимальным значением фундаментальной частоты поперечных колебаний.

**Литература:**

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - Москва: Мир, 1987. - 542 с.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - Москва: Гостехиздат, 1957.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - Москва: Наука, 1977. - 415 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - Москва: Мир, 1975. - 542 с.
5. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. - Москва: Наука, 1980. - 256 с.

Prezentat la 24.01.2007